Teoria dos Grafos

Maria Claudia Silva Boeres

boeres@inf.ufes.br

Conceitos Básicos

- O que é um grafo?

$G=(V, E)$

$V = \{v_1, ..., v_n\}$

vértices

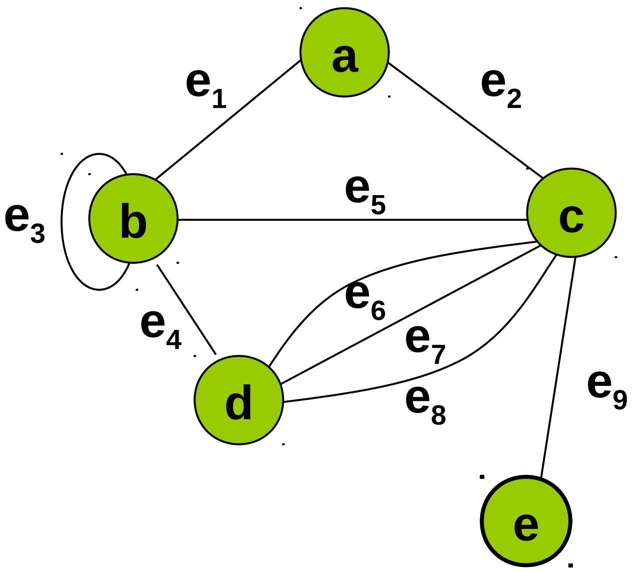
$E = \{e_1, ..., e_m\}$

arestas

$e_k = \{v_i,v_j\}$, $k = 1,...,m$, $i,j = 1,..., n$

v_i e v_j são ditos extremos de e_k

Exemplo



Multigrafo

G = (V, E)

V = {a,b,c,d,e}

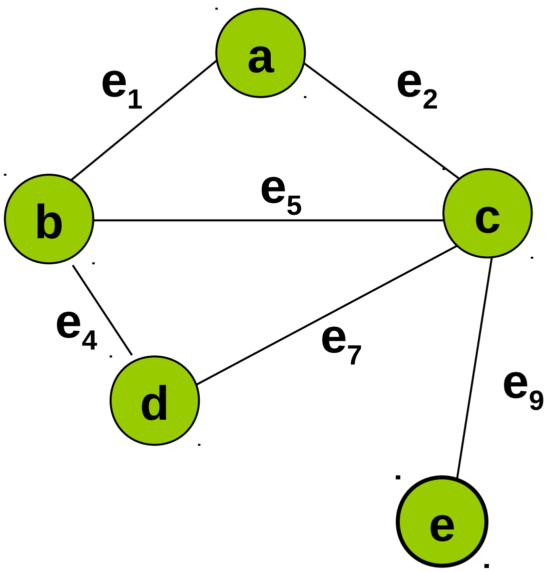
E = {{a,b},{a,c},{b,b},{b,c},{b,d},{c,d},{c,d},{c,d},{c,e}} =
{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9}

Exemplo

G = (V, E)

V = {a,b,c,d,e}
E = {{a,b},{a,c},{b,c},{b,d},{c,d},{c,e}} =
{ e1, e2, e4, e5, e7, e9}

Grafo simples



- Uma aresta do tipo $\{v_i,v_i\}$ é denominada laço.
  - A aresta e_3 do exemplo anterior é um laço.
- Arestas que possuem os mesmos vértices extremos são ditas paralelas.
  - As arestas e_6, e_7 e e_8 do exemplo anterior são paralelas.
- Um grafo que possui arestas paralelas é denominado multigrafo.
- Um grafo sem laços nem arestas paralelas é denominado grafo simples.

- O que é um grafo direcionado?

$D=(V, A)$

$V = \{v_1, ..., v_n\}$

vértices

$A = \{a_1, ..., a_m\}$

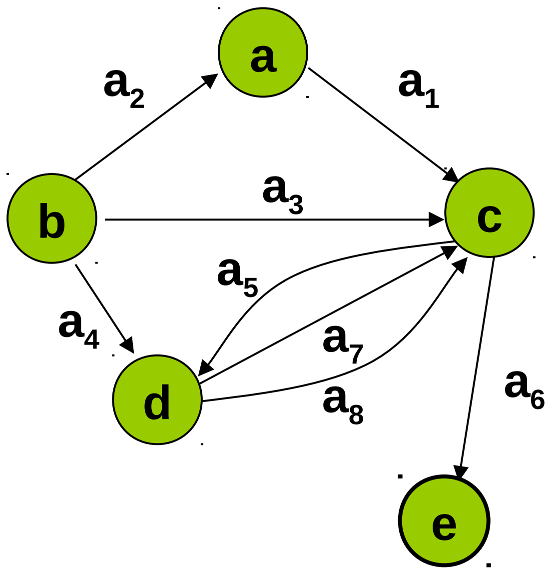
arcos

$a_k = (v_i,v_j)$, $k = 1,...,m$, $i,j = 1,..., n$

v_i e v_j são ditos extremos de a_k

Exemplo

Grafo direcionado

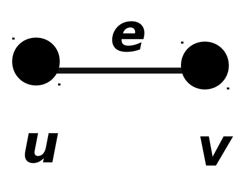


D = (V, A)

V = {a,b,c,d,e}

A = {(a,c),(b,a),(b,c),(b,d),(c,d),(c,e), (d,c), (d,c)} =
{ a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8}

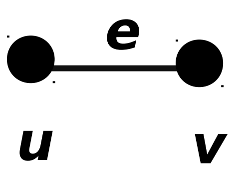
- Os extremos de uma aresta são ditos incidentes com a aresta, e vice-versa.



u **e** ***v*** **são incidentes com a aresta** ***e***
e **é incidente a** ***u*** **e a** ***v***

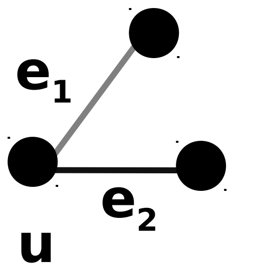
- Dois vértices que são incidentes a uma mesma aresta são ditos adjacentes.

***u* e *v* são adjacentes**

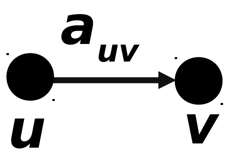


- Duas arestas que são incidentes a um mesmo vértice são ditas adjacentes.

e_1 e e_2 são adjacentes



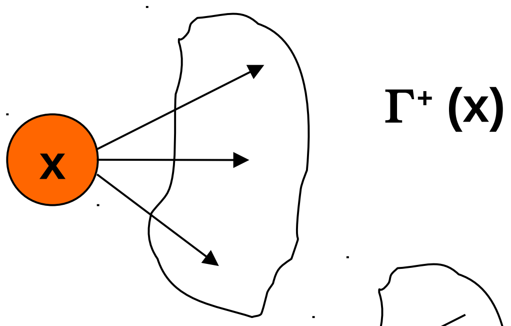
- Os extremos de um arco são ditos incidentes com o arco e vice-versa.
- Um arco incide exteriormente em $u \in V$ se u for extremidade inicial
- Um arco incide interiormente em $v \in V$ se v for extremidade final do arco.

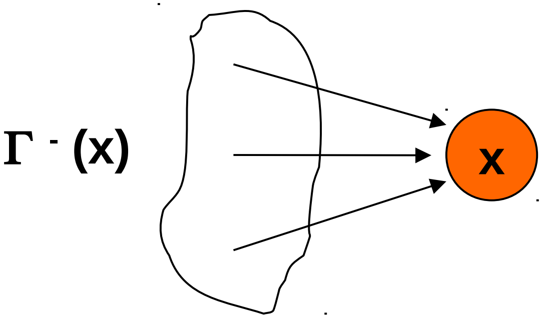


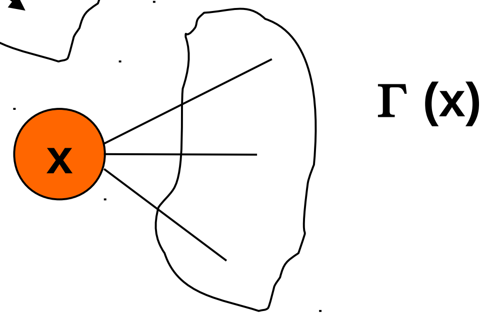
u **e** ***v*** **são incidentes ao arco a** ***e***
a **é incidente aos vértices** ***u*** **e** ***v***

Vizinhança

- Vizinho ou vértice adjacente de um vértice x, em um grafo orientado ou não, é todo vértice y que participa de uma ligação (arco ou aresta) com x.







- Em um digrafo $G = (X, U)$, diz-se que $y \in X$ é sucessor de $x \in X$ quando existe $(x,y) \in U$. Diz-se também que x é antecessor de y.
  - $\Gamma^{+}(x)$: conjunto de sucessores de x
  - $\Gamma^{-}(x)$: conjunto de antecessores de x

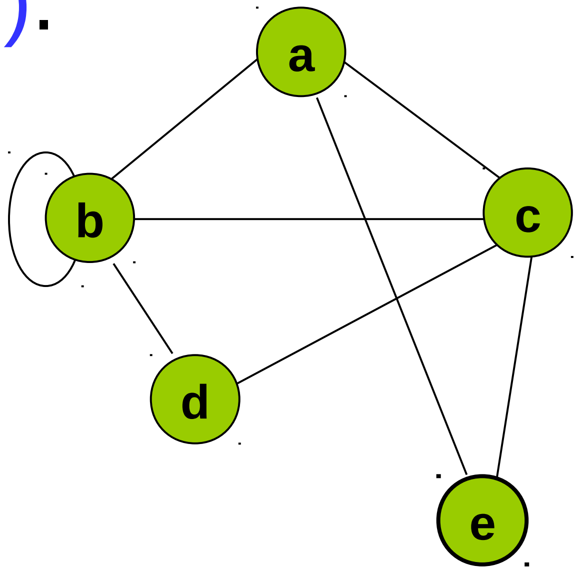
O conceito de incidência
ou adjacência
é importante para a
representação
da estrutura de um grafo
como um diagrama

- O número de vértices de um grafo G é denotado por n = |V|. O valor n também é conhecido como ordem de G
- O número de arestas de um grafo é denotado por m = |E|
- Se n e m são finitos, o grafo é finito. Caso contrário é dito infinito.
  - Exemplo de grafo infinito: malhas

Grau de um vértice

- O número de arestas incidentes a um vértice *v* é denominado grau(*v*) e representado por d(*v*).

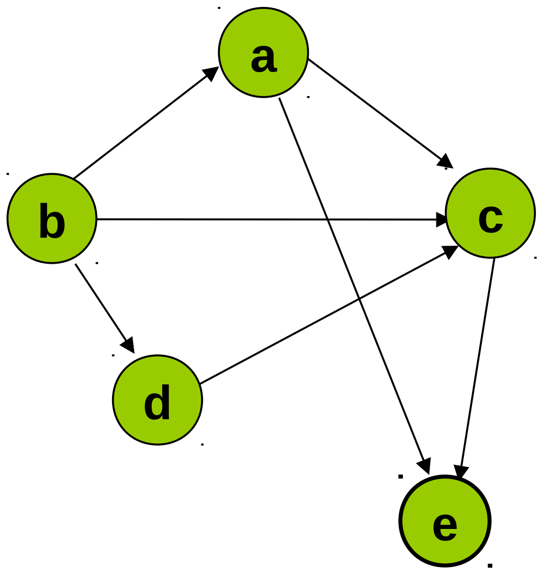
d(a) = 3
d(b) = 5
d(c) = 4
d(d) = 2
d(e) = 2



- Grau também é conhecido como valência.

Semigrau de um vértice

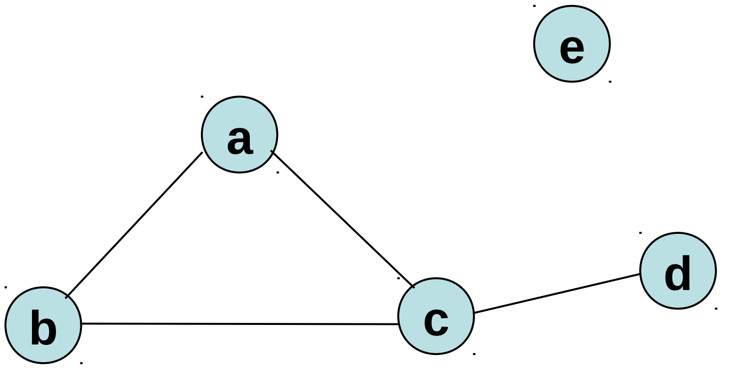
- Semigrau exterior ($d^+(x)$)
  - número de arcos incidentes exteriormente a x
- Semigrau interior ($d^-(x)$)
  - número de arcos incidentes interiormente a x
- $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$



d+(a) = 2; d-(a) = 1; d(a) = 3
d+(b) = 3; d-(b) = 0; d(b) = 3
d+(c) = 1; d-(c) = 3; d(c) = 4
d+(d) = 1; d-(d) = 1; d(d) = 2
d+(e) = 0; d-(e) = 2; d(e) = 2

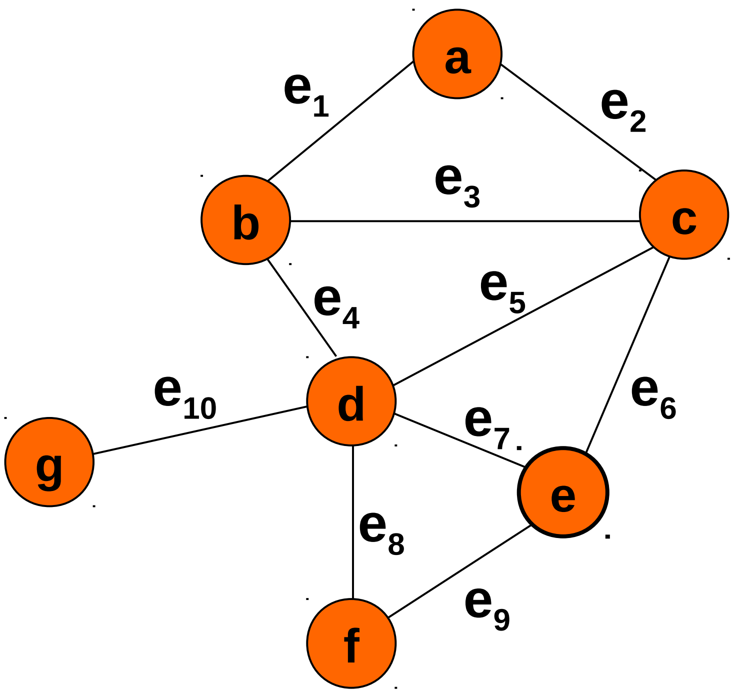
- Vértice isolado é o vértice que não possui arestas incidentes (grau nulo)
- Vértice com grau nulo: $d(x) = d^{+}(x) = d^{-}(x) = 0$
- Vértice folha ou terminal é o vértice que possui grau 1
- Vizinhos de um vértice são os vértices adjacentes a ele.

d é um vértice folha e
e é um vértice isolado
b e **c** são vizinhos de **a**



- Pares de vértices (ou de arestas) não adjacentes são denominadas independentes.
- Um conjunto de vértices (ou arestas) é independente se nenhum par de seus elementos é adjacente.

Exemplo



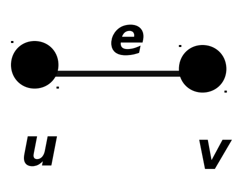
- e_1 e e_5 são independentes
- a e d são independentes
- {b,e,g} é um conjunto independente
- {e_1, e_5 } é um conjunto independente

Teorema 1:

Seja G = (V,E) um grafo simples com n vértices e m arestas. Então

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Prova:

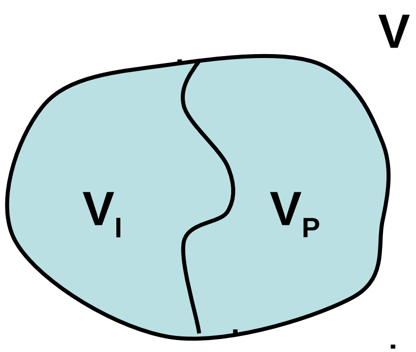


- A aresta *e* é incidente aos vértices *v* e *w*
- É contabilizada no cômputo do grau de *v* e também de *w*.

Corolário 1:

O número de vértices de grau ímpar, de um grafo G, é par.

Prova:



$$\sum_{v \in V} d(v) = \underbrace{\sum_{v \in V_I} d(v)}_{\text{par}} + \underbrace{\sum_{v \in V_P} d(v)}_{\text{par}} = \underbrace{2m}_{\text{par}}$$

Exercícios

- Mostre que o grau máximo de qualquer vértice em um grafo simples com n vértices é n-1.

- Mostre que o número máximo de arestas em um grafo simples com n vértices é

$$n(n-1)/2$$

Exercícios

Construa um grafo com 10 vértices, que possua a seguinte seqüência de graus: {1,1,1,3,3,3,4,6,7,9}, ou mostre ser impossível construí-lo.