Teoria dos Grafos

Maria Claudia Silva Boeres

boeres@inf.ufes.br

Conceitos Básicos

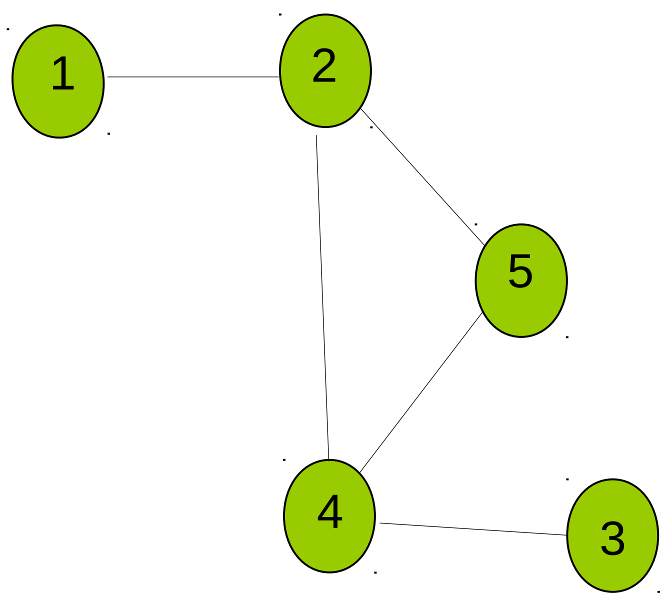
Mais sobre relações de adjacência e incidência...

Vizinhança de um vértice

- Vizinho de um vértice x em um grafo G é todo vértice y que é extremo de uma ligação ou aresta incidente a x.
- Conjunto de vizinhos de x: Γ (x)
- A informação contida nos conjuntos de vizinhos corresponde à contida no conjunto de ligações. Assim, G = (V, Γ) corresponde à definição de listas de adjacência.

Incidência de um conjunto

- O conjunto de arestas incidentes em A ⊆ V: Inc(A)
  - Uma aresta incide em A ⊆ V se os seus vértices extremos não estão simultaneamente em A.



Inc(A) = {{1,2}, {3,4}}

Subgrafos

Subgrafos

- Um grafo H é um subgrafo de G ($H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$
- Quando $H \subseteq G$ e $H \neq G$, denotamos $H \subset G$ e dizemos que H é subgrafo próprio de G
- Se H é um subgrafo de G então G é um supergrafo de H
- Um subgrafo gerador de G é um subgrafo H com $V(H) = V(G)$

Subgrafo Induzido (por vértice)

- Seja V´ um subconjunto não vazio de V. O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é V´ e o conjunto de arestas é o conjunto de todas as arestas de G com ambos extremos em V´ é chamado de subgrafo de G induzido por V'.
- G[V’]: é um subgrafo induzido de G por V´.

Subgrafo induzido (por aresta)

- Seja E´um subconjunto não vazio de arestas de E. O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é o conjunto dos extremos das arestas em E´ é chamado de subgrafo de G induzido por arestas

G[V\V´] denotado por G-V’

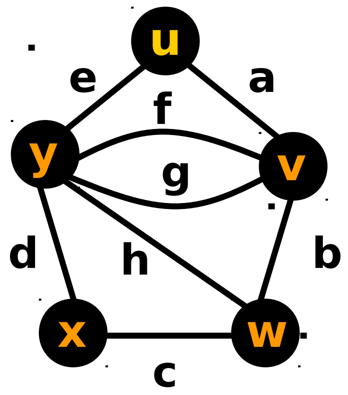
- É o subgrafo obtido a partir de G pela remoção dos vértices em V´ e suas arestas incidentes
- Se V´={v}, escrevemos G-v ao invés de G-{v}

G – E' e G + E'

- G-E´: subgrafo gerador de G com conjunto de arestas E\E´

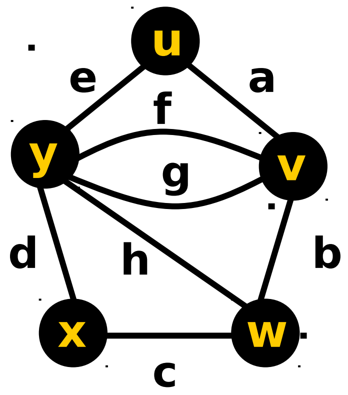
- G+E´: grafo obtido a partir de G adicionando um conjunto de arestas E´

Exemplo



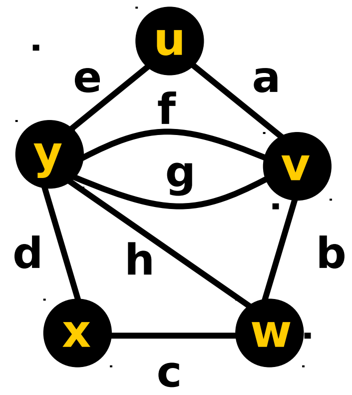
Exemplo

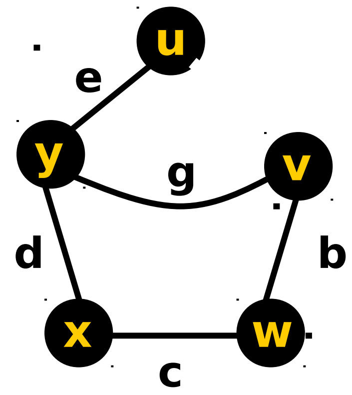
Um subgrafo gerador de G



Exemplo

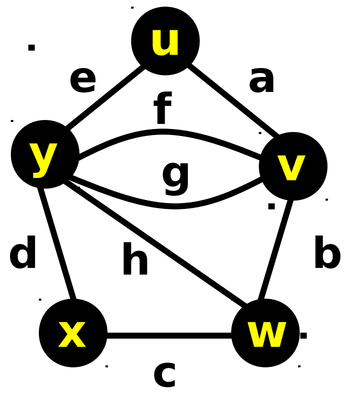
Um subgrafo gerador de G





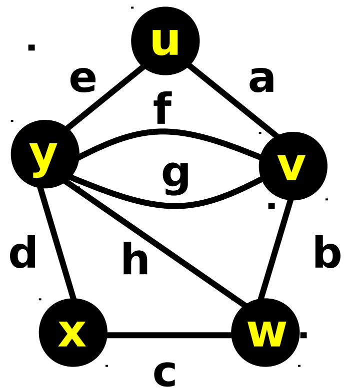
Exemplo

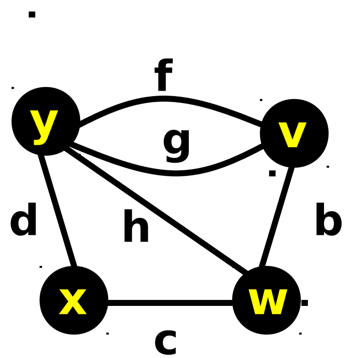
G – {u}



Exemplo

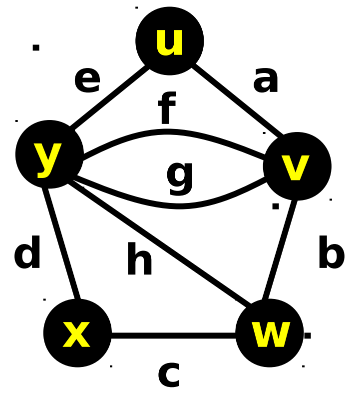
G – {u}





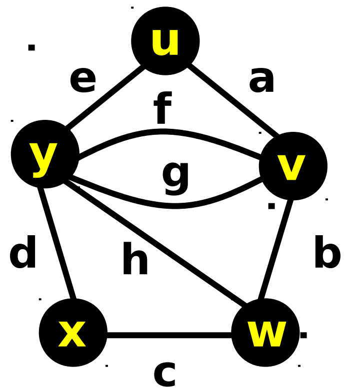
Exemplo

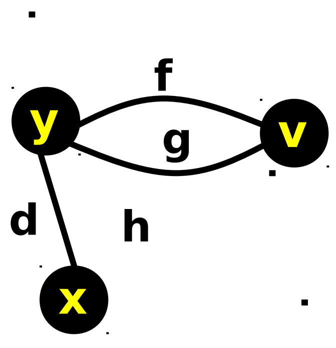
G – {u,w}



Exemplo

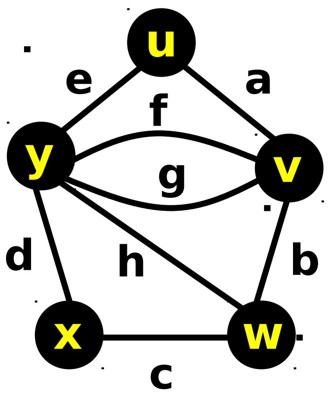
G – {u,w}





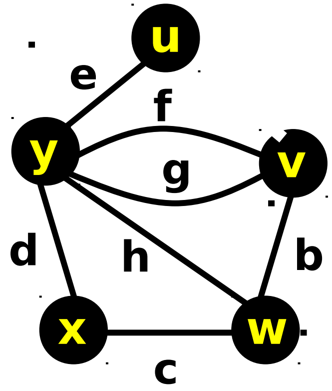
Exemplo

G-{a, b, f}



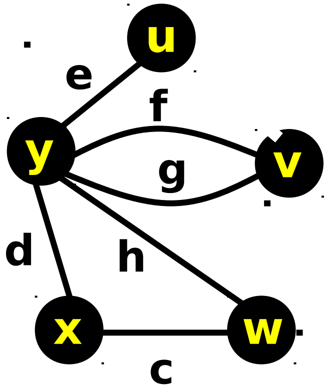
Exemplo

G-{a, b, f}



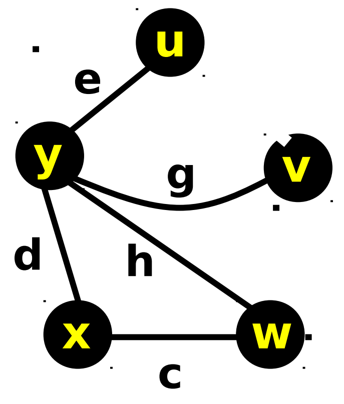
Exemplo

G-{a, b, f}



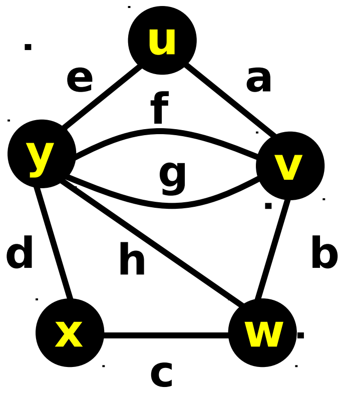
Exemplo

G-{a, b, f}



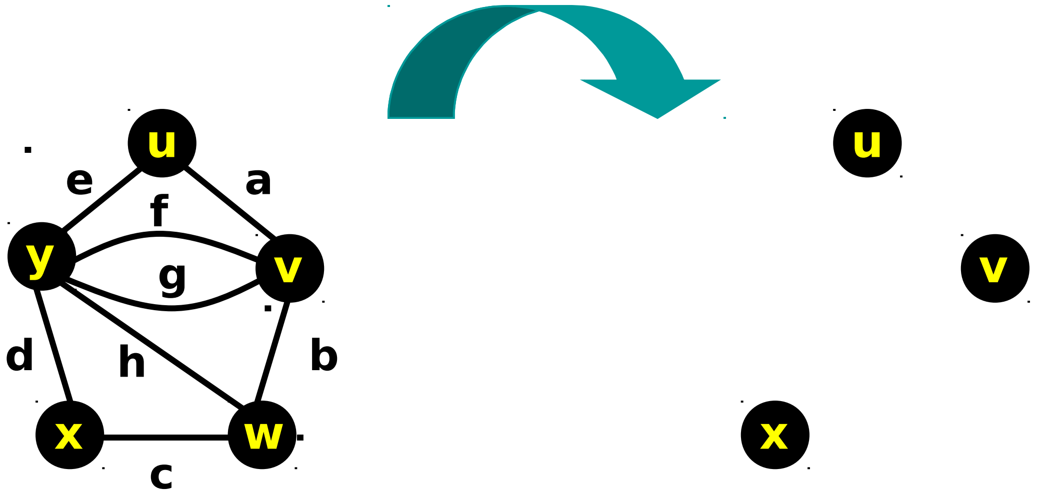
Exemplo

O subgrafo induzido G[u, v, x]



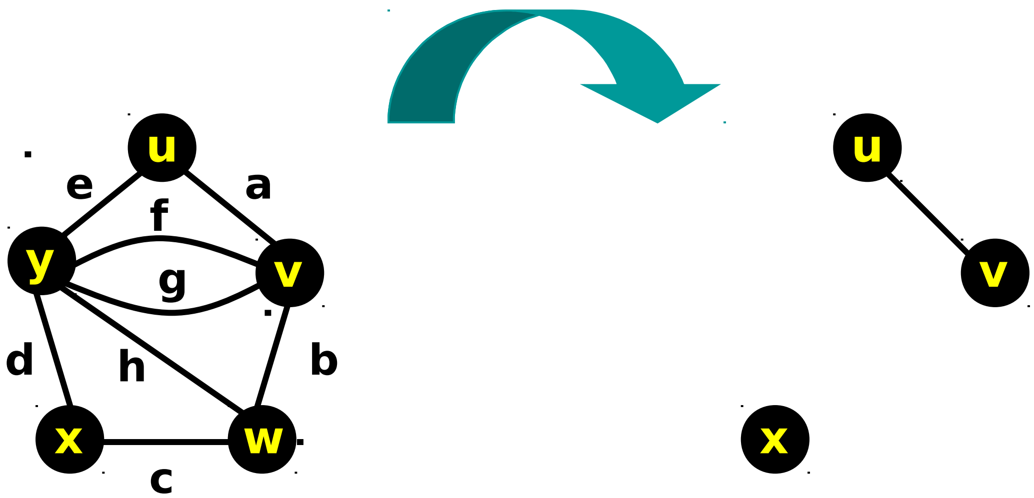
Exemplo

O subgrafo induzido G[u, v, x]



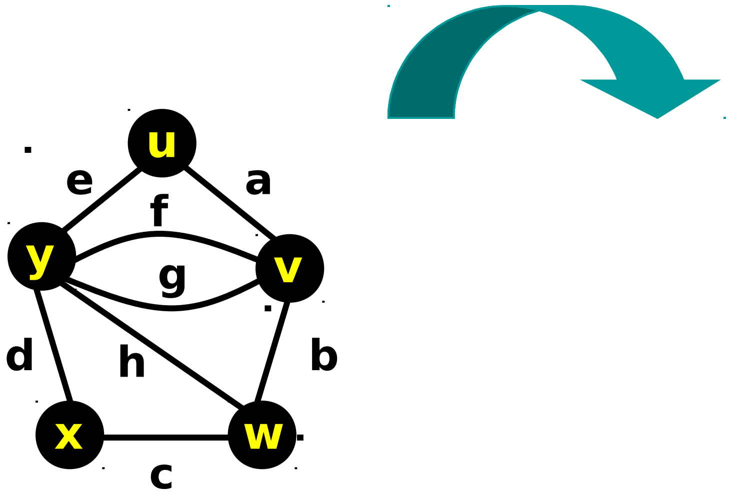
Exemplo

O subgrafo induzido G[u, v, x]



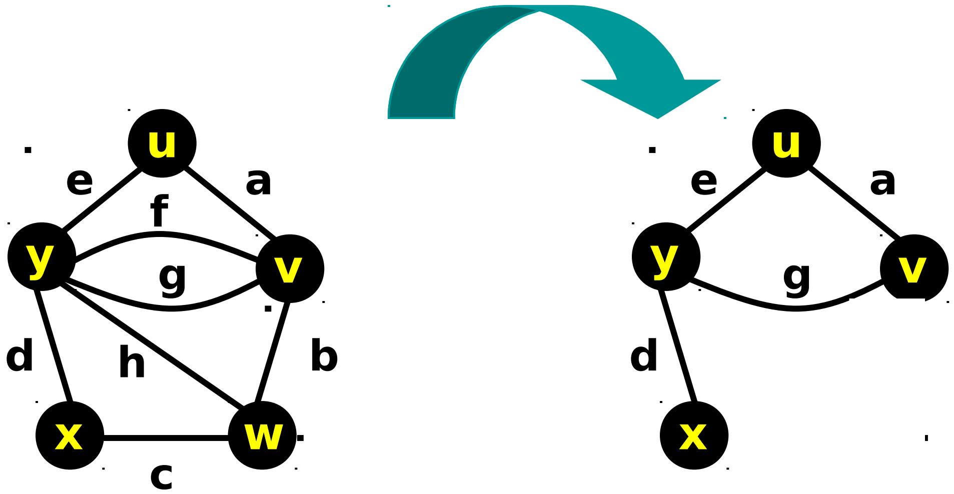
Exemplo

O subgrafo induzido G[a, d, e, g] por aresta



Exemplo

O subgrafo induzido G[a, d, e, g] por aresta



Subgrafos Disjuntos

- Sejam G_1, $G_2 \subseteq G$

G_1 e G_2 são disjuntos (em vértices) se $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$

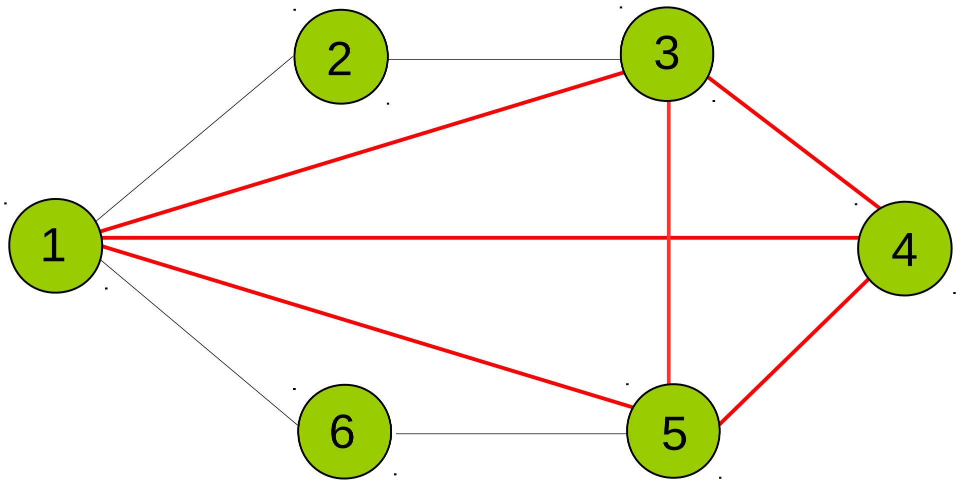
Subgrafos Disjuntos em aresta

- Sejam $G_1, G_2 \subseteq G$

G_1 e G_2 são disjuntos em aresta se $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$

Clique

- Subgrafo de um grafo G, que é completo.



Exercício

- Construa subgrafos de grafos orientados.

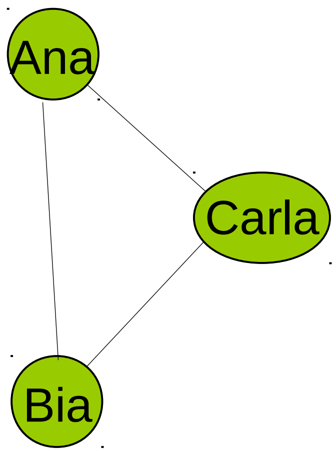
Algumas propriedades do grafo

Grafo Simétrico

- Seja G = (V,E):

$$(i,j) \in E \Leftrightarrow (j,i) \in E,\ \forall i,j \in V$$

Aresta: i é irmã de j



Grafo Anti-simétrico

- Seja G = (V,E):

$$(i,j) \in E \Leftrightarrow (j,i) \notin E$$

Essa característica não se aplica a grafos não orientados

Considerando digrafos...

- Simples: sem laços ou arcos paralelos
- Assimétrico: possui no máximo um arco entre cada par de vértices
- Simétrico: para cada par de vértices u e v, se existe um arco (u,v) então existe (v,u).
- Completo simétrico (n(n-1) arcos)
- Completo assimétrico (n(n-1)/2 arcos)

Isomorfismo de Grafos

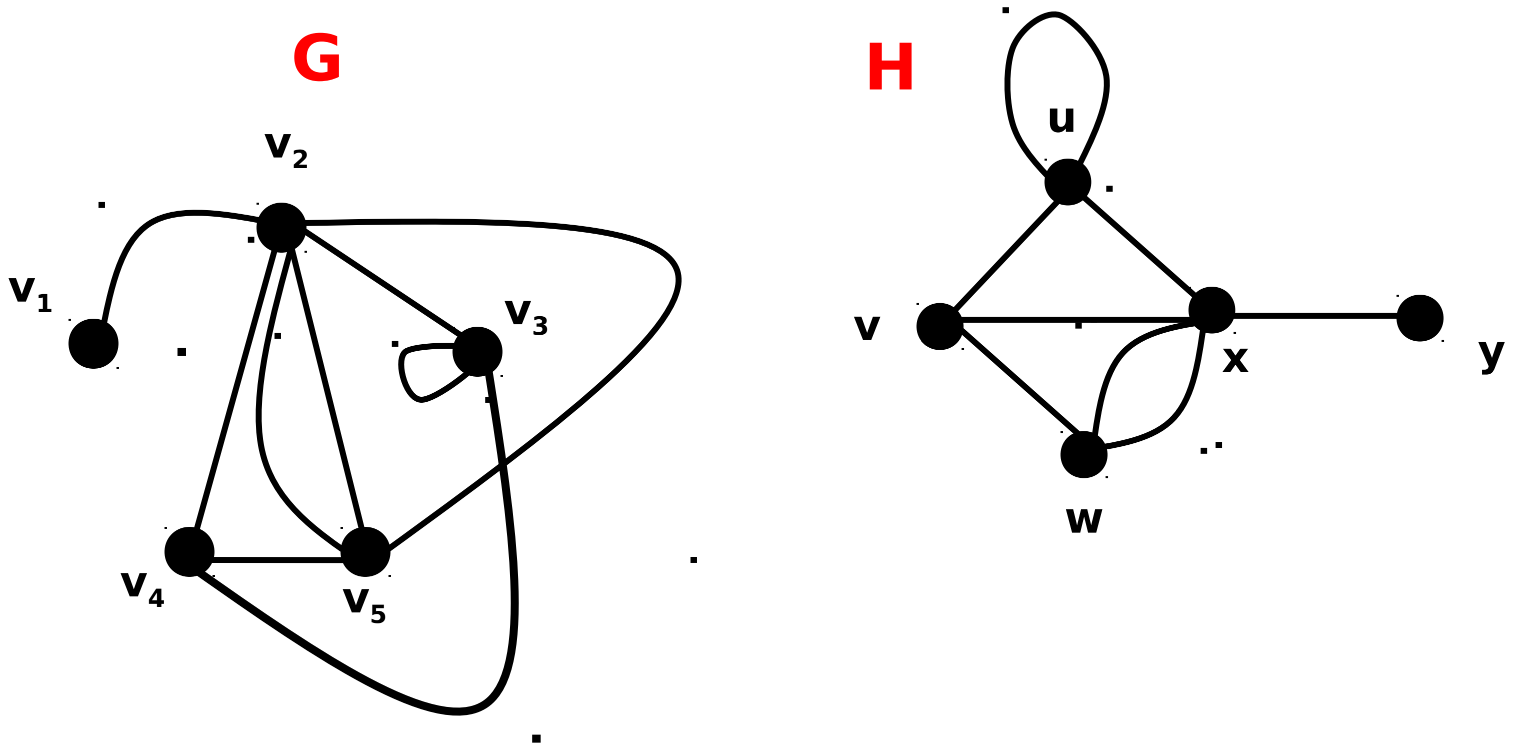
Isomorfismo entre Grafos

- Um isomorfismo entre dois grafos é uma bijeção f de V(G) em V(H) tal que

$$\{u,v\} \in E(G) \iff \{f(u),f(v)\} \in E(H)$$

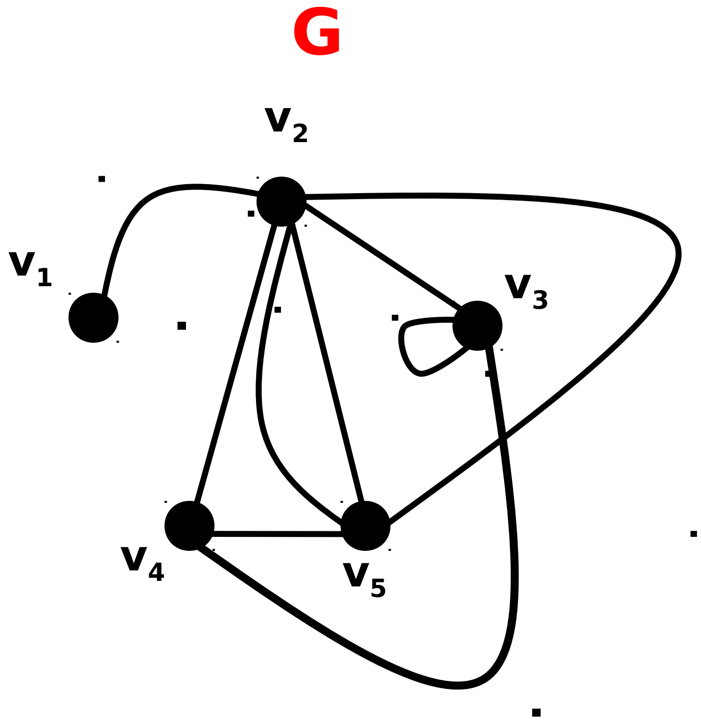
- É possível alterar o nome dos vértices de um deles de forma que fiquem iguais.

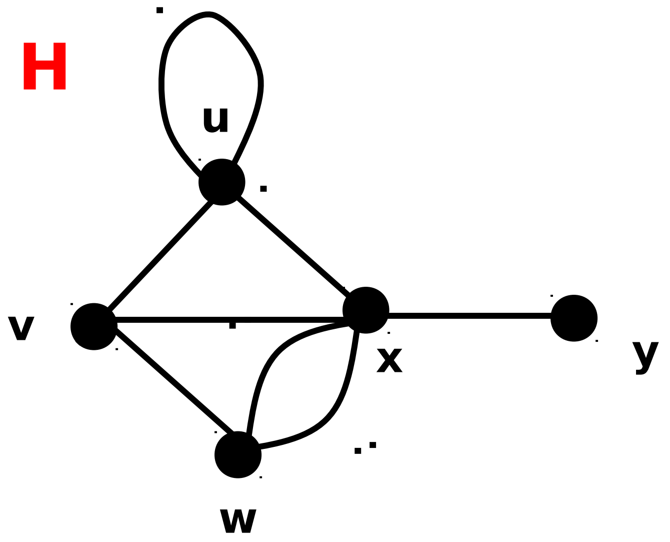
Exemplo: G ≅ H ?



Exemplo: G ≅ H ?

Para mostrar que dois grafos são isomorfos, devemos indicar um isomorfismo entre eles.

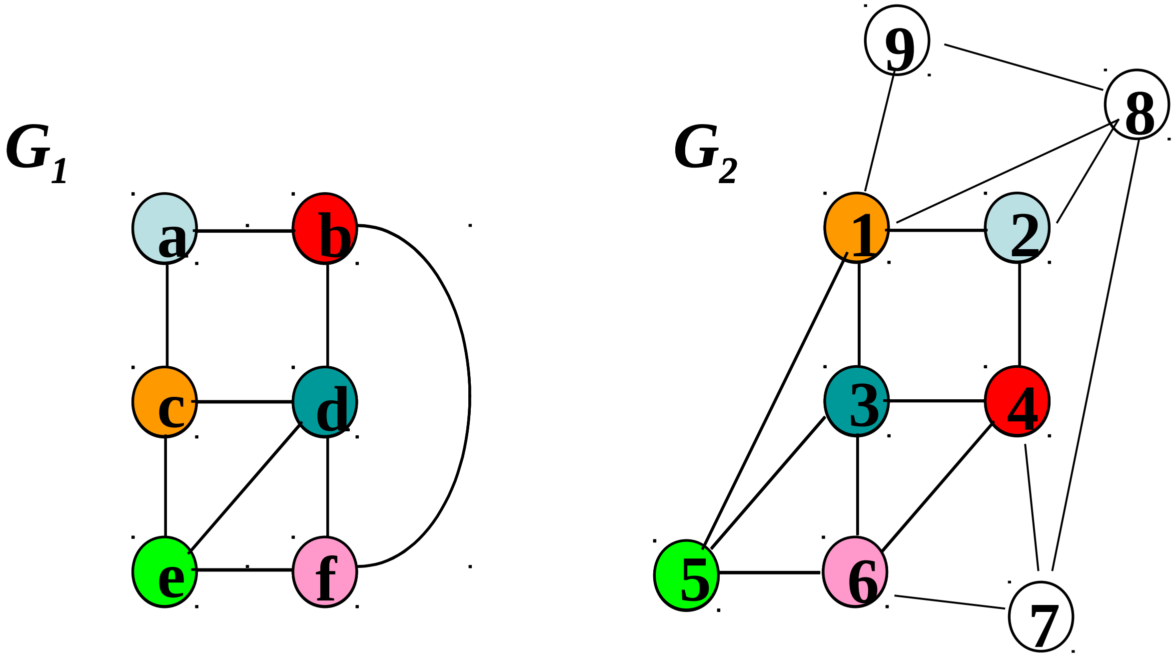




Isomorfismo de subgrafos

- Dados dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, diz-se que G_1 contém um subgrafo isomorfo a G_2 sss existem um subconjunto $V \subseteq V_1$ e um subconjunto $E \subseteq E_1$ tal que $|V| = |V_2|$ e $|E| = |E_2|$ e uma função biunívoca $f: V_2 \rightarrow V$ tal que $\{u,v\} \in E_2$ sss $\{f(u), f(v)\} \in E$

Exemplo



Isomorfismo em digrafos

- Seja G um digrafo e G´ o grafo correspondente sem orientações.
- Seja G´ um grafo não orientado. Então G, obtido a partir de G´ definindo-se uma orientação arbitrária de suas arestas é dito digrafo associado a G.

Isomorfismo em digrafos

- Se G é um digrafo e G´ é um grafo não orientado obtido a partir de G: único.
- Se G é um grafo não orientado e G´ é orientado, obtido a partir de G: várias possibilidades.

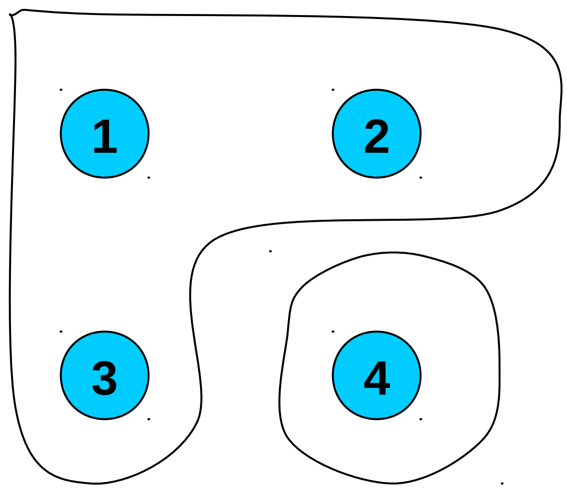
Isomorfismo em digrafos

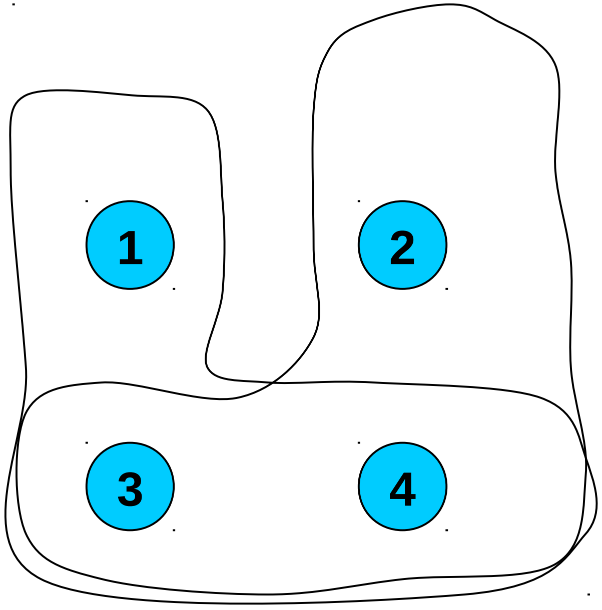
- Quando dois digrafos G1 e G2 são isomorfos?
  - Os grafos não orientados G1´ e G2´ correspondentes a G1 e G2 devem ser isomorfos.
  - As orientações entre as arestas correspondentes devem ser as mesmas.

Alguns exemplos de grafos especiais

Hipergrafo

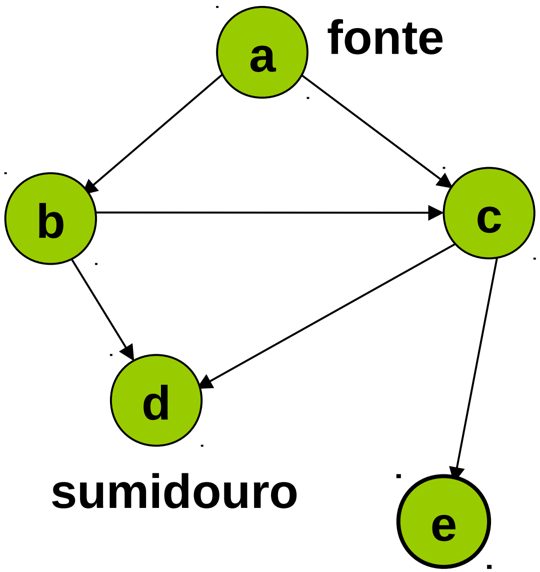
- Um hipergrafo simples H = (V, *P*(V) – Ø) é formado por arestas definidas como subconjuntos de V.





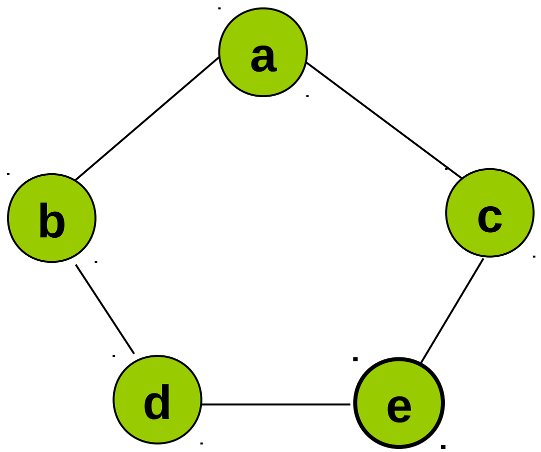
Digrafo

- Grafo direcionado ou digrafo possui arestas direcionadas.

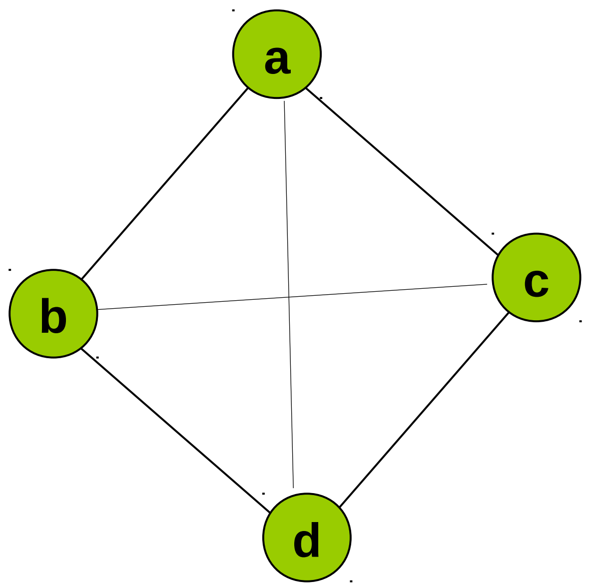


Grafos Regulares

- k - Regular: $\forall$ v $\in$V, d(v) = k



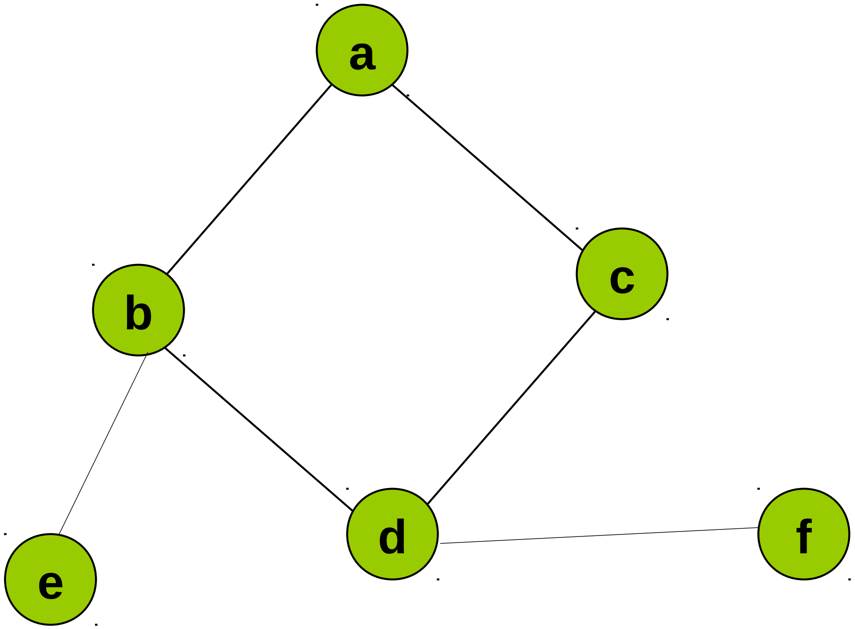
2 - regular



3 - regular

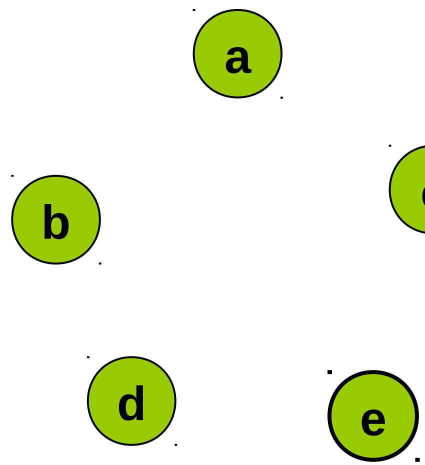
Grafo altamente irregular

- Um grafo é altamente irregular se cada um de seus vértices é adjacente a vértices de graus diferentes entre si.



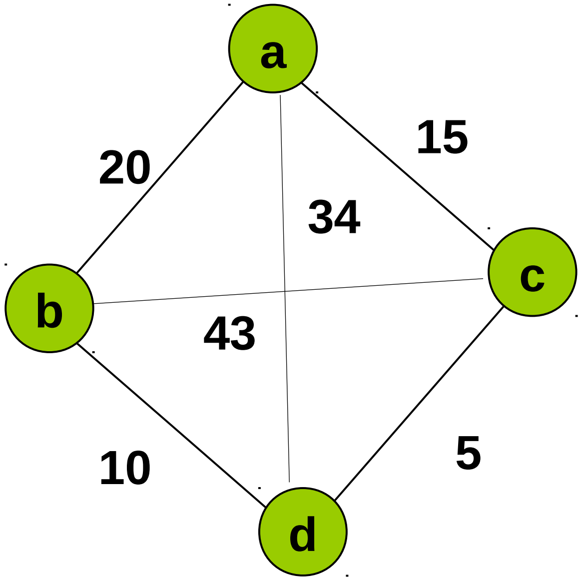
Grafo Nulo ou Trivial

- Um grafo G = (V,E) é dito nulo se V ≠ Ø e E = Ø
  - Um grafo deve ter pelo menos um vértice.



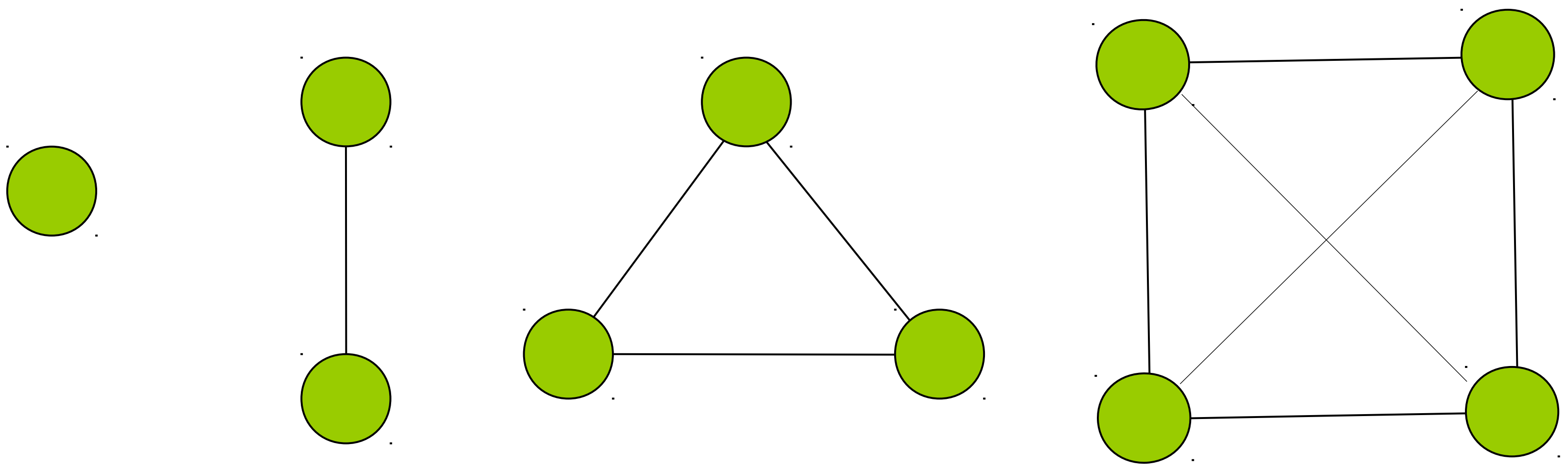
Grafo rotulado ou valorado

- Rotulado ou valorado em vértices ou arestas: a cada vértice ou a cada aresta é atribuído um rótulo.



Grafo Completo

- completo: existe uma aresta ligando cada par de vértices.



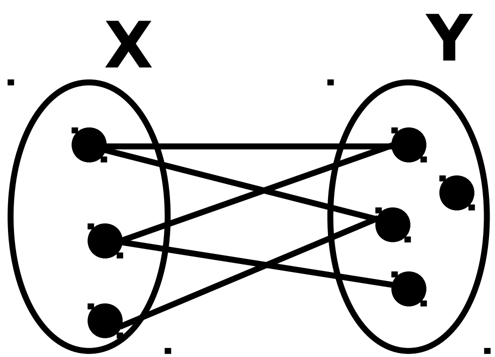
K_1 K_2 K_3 K_4

Grafo k-partido

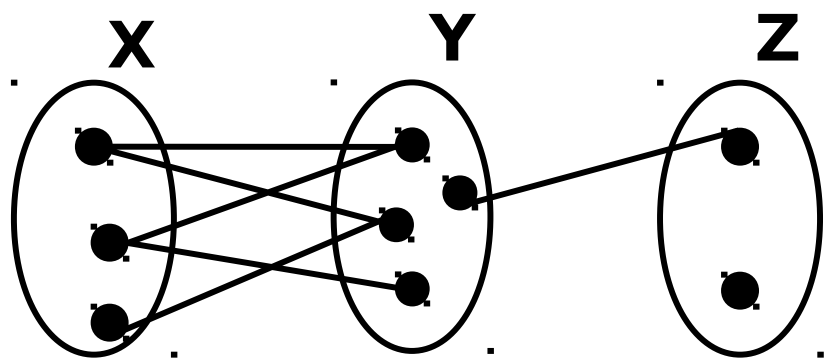
- *k* – partido: existe uma partição

$$P = \{Y_i \mid i = 1, \ldots, k,\ Y_i \cap Y_j = \emptyset,\ i \neq j\}$$

do seu conjunto de vértices, tal que não existam ligações entre elementos de um mesmo Y_i



bipartido



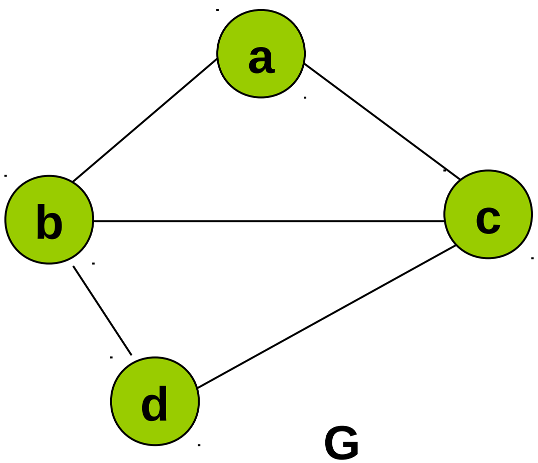
3 - partido

Grafo Bipartido Completo

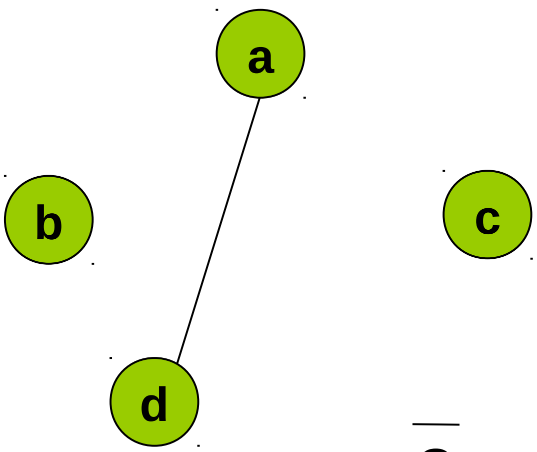
- é um grafo bipartido com bipartição (X, Y) em que cada vértice de X é adjacente a cada vértice de Y.
  - Se $|X|=p$ e $|Y|=q$, então denotamos tal grafo por $K_{p,q}$

Grafo Complementar

Seja G um grafo. O grafo complementar $\overline{G}$ é o grafo que contém as ligações que não estão em G.



G



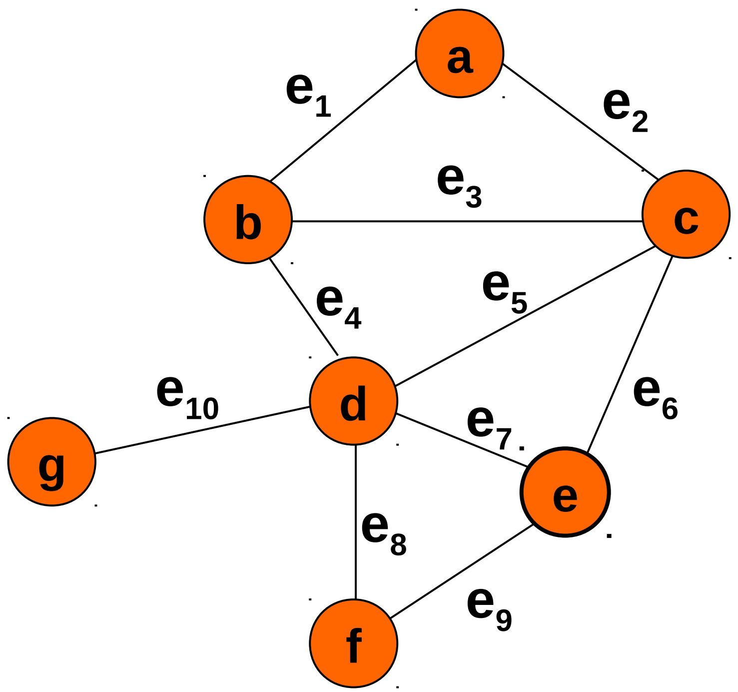
$\overline{G}$

Exercícios

- Os turistas John, Leuzinger, Dufois e Medeiros se encontram em um bar em Paris e começam a conversar. As línguas disponíveis são o inglês, o francês, o português e o alemão. John fala todas as línguas, Leuzinger não fala o português, Dufois fala francês e alemão e Medeiros fala inglês e português.
  - a) Represente por meio de um grafo todas as possibilidades de **um deles dirigir-se a outro, sendo compreendido**
  - b) Represente por meio de um hipergrafo H = (V,W) as capacidades linguísticas do grupo. Qual é o significado das interseções $W_i \cap W_j$, onde $W_k \in W$?

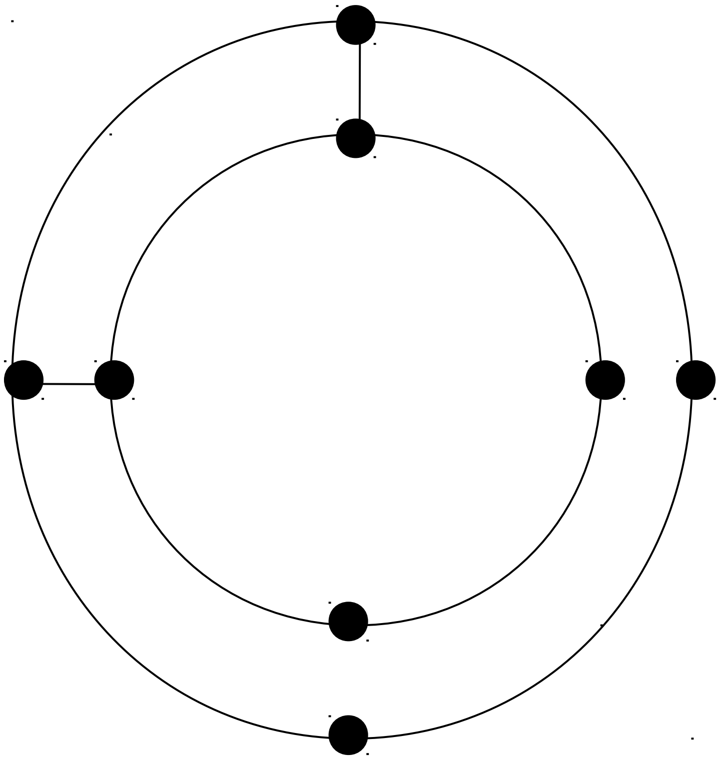
- Mostre que não existem grafos k-regulares com k ímpar que possuam um número ímpar de vértices
- Mostre que não existem grafos de 10 vértices e 24 arestas com $d(v) \in \{1,5\}$ $\forall v$ de V.

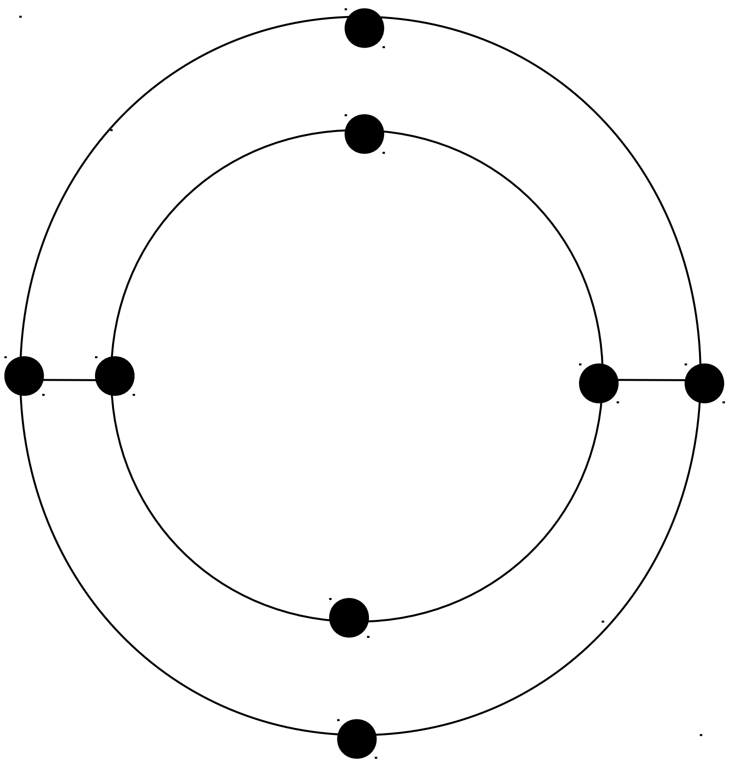
Forneça



- um subgrafo
- um subgrafo induzido
- um subgrafo induzido por arestas
- G – {d}
- um conjunto independente de arestas
- G – {e1, e5, e8}
- uma clique
- os vizinhos de d
- subgrafos disjuntos
- o complementar de G

São isomorfos?





- O número de pessoas que estão em uma festa, que conhecem um número ímpar de pessoas na festa, deve ser par?