Conexidade

Grafo Conexo

- u e v são ditos conectados se existir um caminho entre u e v em G.

Grafo Conexo

- u e v são ditos conectados se existir um caminho entre u e v em G
  - Notação: caminho-(u,v)
- G é dito conexo se existir caminho entre quaisquer dois vértices de G

Grafo Conexo

- u e v são ditos conectados se existir um caminho entre u e v em G
  - Notação: caminho-(u,v)
- G é dito conexo se existir caminho entre quaisquer dois vértices de G

Relação de Equivalência definida pela conexão entre os vértices

Equivalência

- Reflexiva

Equivalência

- Caminho-(u, u)

Equivalência

- Caminho-(u, u)
- Simétrica

Equivalência

- Caminho-(u, u)
- Se existe caminho-(u,v) então existe caminho-(v,u)

Equivalência

- Caminho-(u, u)
- Se existe caminho-(u,v) então existe caminho-(v,u)
- Transitiva

Equivalência

- Caminho-(u, u)
- Se existe caminho-(u,v) então existe caminho-(v,u)
- Se existem os caminhos-(u,v) e –(v,w) então existe caminho-(u,w)

Componentes Conexas

Componentes Conexas

- É possível particionar G em classes de equivalência: $V_1, V_2, ..., V_p$ tal que dois vértices são conectados se e somente se pertence a um mesmo V_i

Componentes Conexas

- É possível particionar G em classes de equivalência: V_1, V_2, ..., V_p tal que dois vértices são conectados se e somente se pertence a um mesmo Vi
- Os subgrafos $G(V_1)$, ..., $G(V_p)$ são chamados de componentes conexas de G.

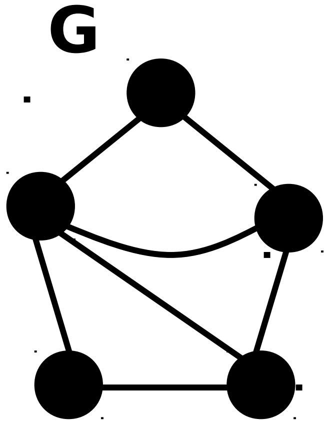
Maximalidade (Minimalidade)

- Seja S um conjunto e S' $\subset$ S. Diz-se que S' é maximal em relação a uma certa propriedade π quando S' satisfaz a propriedade π e não existe subconjunto S'' $\subset$ S e S' $\subset$ S'' que também satisfaz π. Isto é, S' não está contido propriamente em nenhum subconjunto de S que satisfaz π.

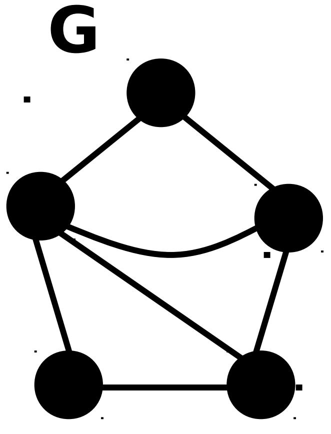
Maximal (Minimal)

- G´ $\subseteq$ G é maximal em relação a uma propriedade π se não houver G” $\supseteq$ G´tal que G” tem a propriedade π.
  - **Componentes conexas:** são todos os subgrafos conexos maximais de G.

Exemplo



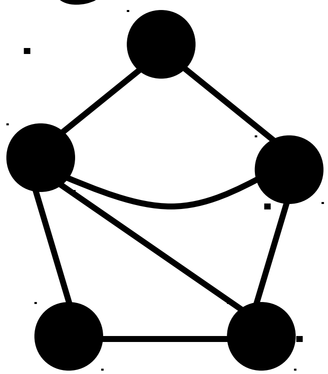
Exemplo



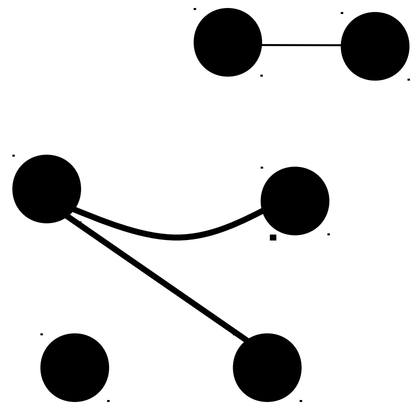
G é Conexo

Exemplo

G

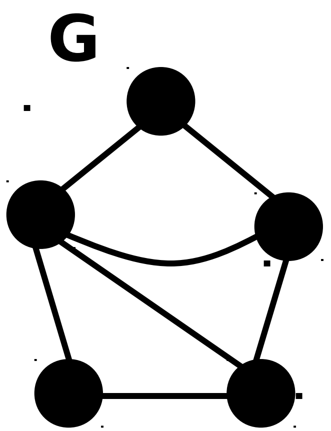


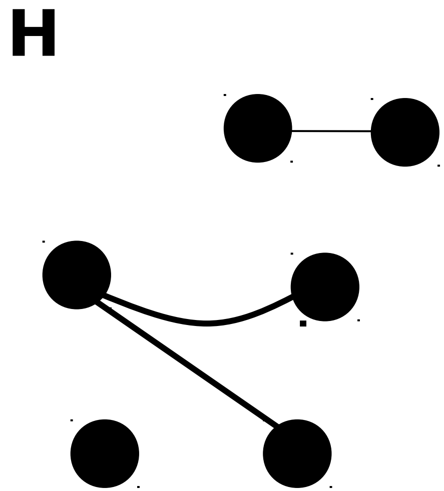
H



G é Conexo

Exemplo

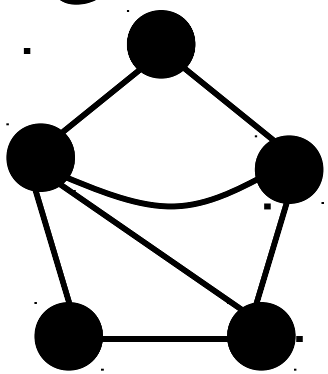


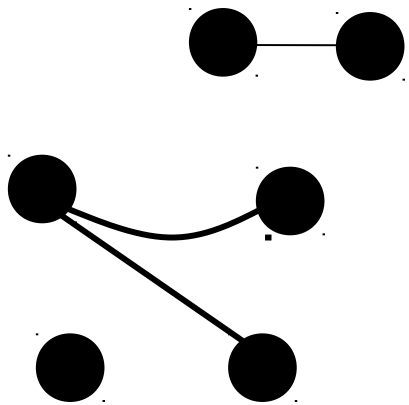


G é Conexo

H é desconexo

Exemplo

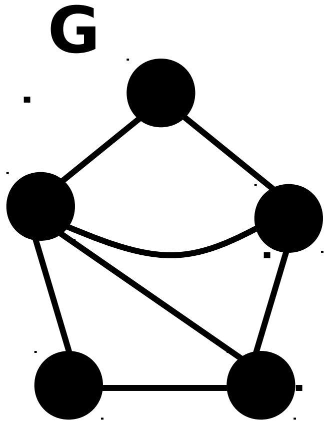


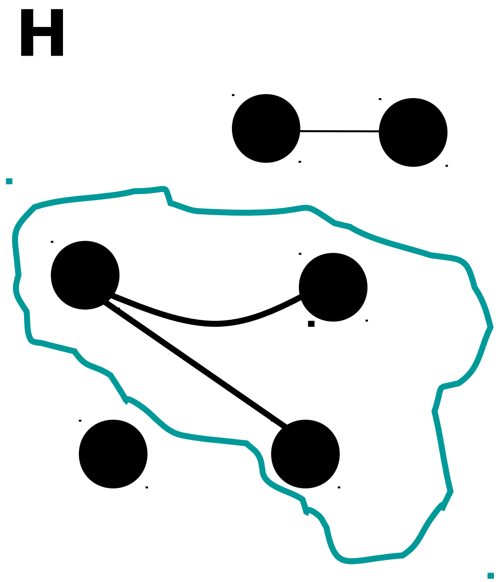


G é Conexo

H é desconexo

Exemplo

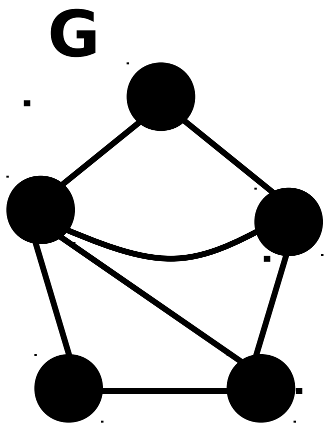


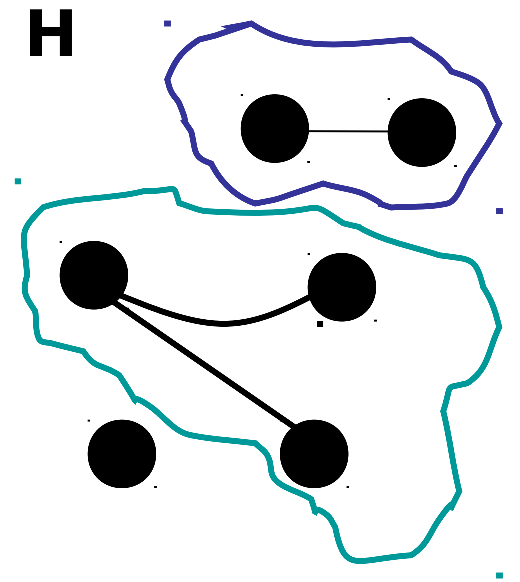


G é Conexo

H é desconexo

Exemplo

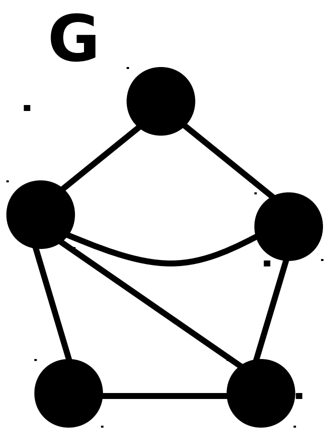


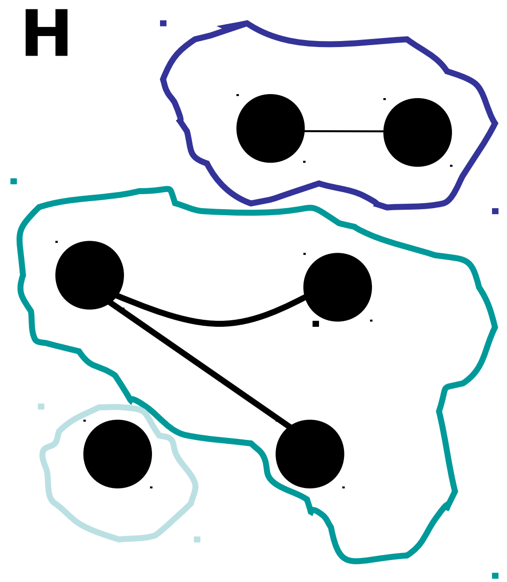


G é Conexo

H é desconexo

Exemplo

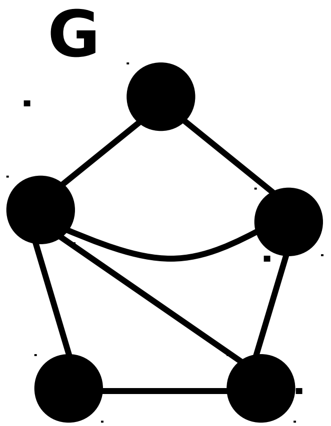


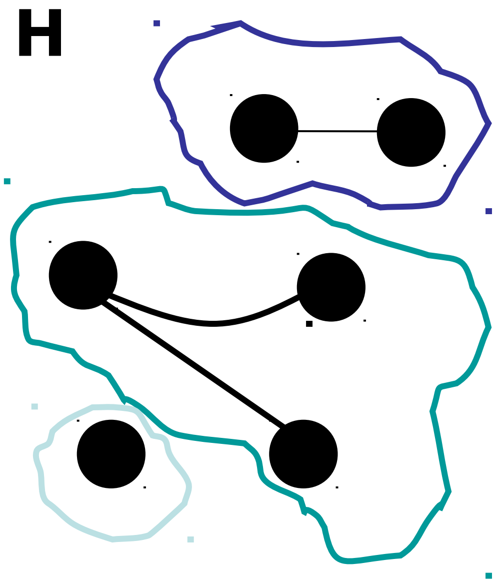


G é Conexo

H é desconexo

Exemplo





G é Conexo

H é desconexo

ω(G)= número de componentes conexas de G

Decomposição por Conexidade

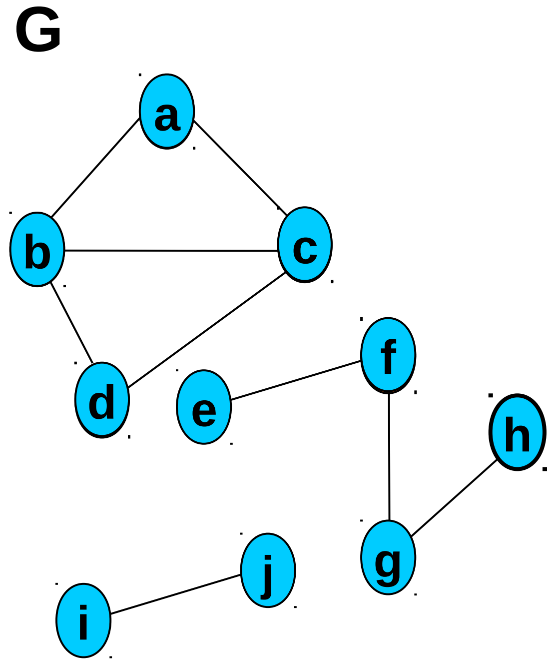
Conex ($s_0 \in V$)

entrada: G = (V,E)

1. v $\leftarrow$ s_0;
2. R(v) $\leftarrow$ {v};
3. Y $\leftarrow$ $\emptyset$;
4. enquanto Γ (R(v)) – R(v) $\neq$ $\emptyset$ faça
5. Y $\leftarrow$ Γ (R(v)) – R(v);
6. R(v) $\leftarrow$ R(v) U Y;
7. fim-enquanto
8. Y $\leftarrow$ R(v);
9. V $\leftarrow$ V – Y;
10. se V $\neq$ $\emptyset$ então
11. Conex ($s \in V$)
12. fim-se-então

saída: componentes conexos de G

Conex(a)



Decomposição por Conexidade

Conex ($s_0 \in V$)

entrada: G = (V,E)

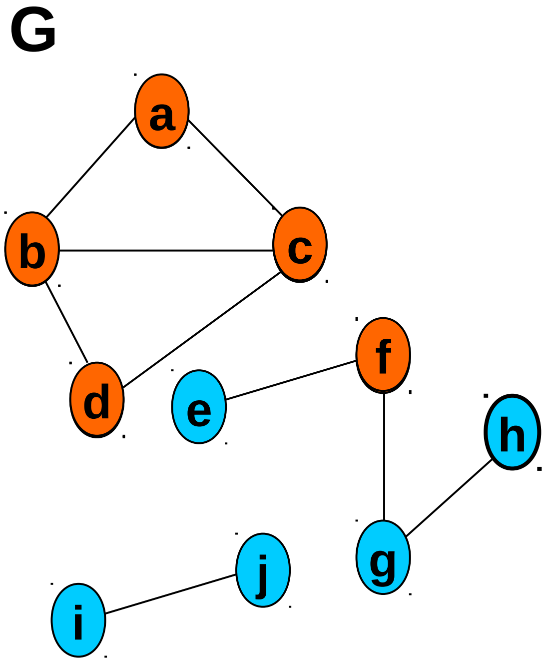
1. $v \leftarrow s_0$;
2. $R(v) \leftarrow \{v\}$;
3. $Y \leftarrow \emptyset$;
4. enquanto Γ (R(v)) – R(v) $\neq \emptyset$ faça
5. $\quad Y \leftarrow \Gamma(R(v)) - R(v)$;
6. $\quad R(v) \leftarrow R(v) \cup Y$;
7. fim-enquanto
8. $Y \leftarrow R(v)$;
9. $V \leftarrow V - Y$;
10. se $V \neq \emptyset$ então
11. $\quad$ Conex ($s \in V$)
12. fim-se-então

saída: componentes conexos de G

$v \leftarrow a$

$Y \leftarrow \emptyset$, {b,c}, {d}

$R(v) \leftarrow$ {a}, {a,b,c},{a,b,c,d}

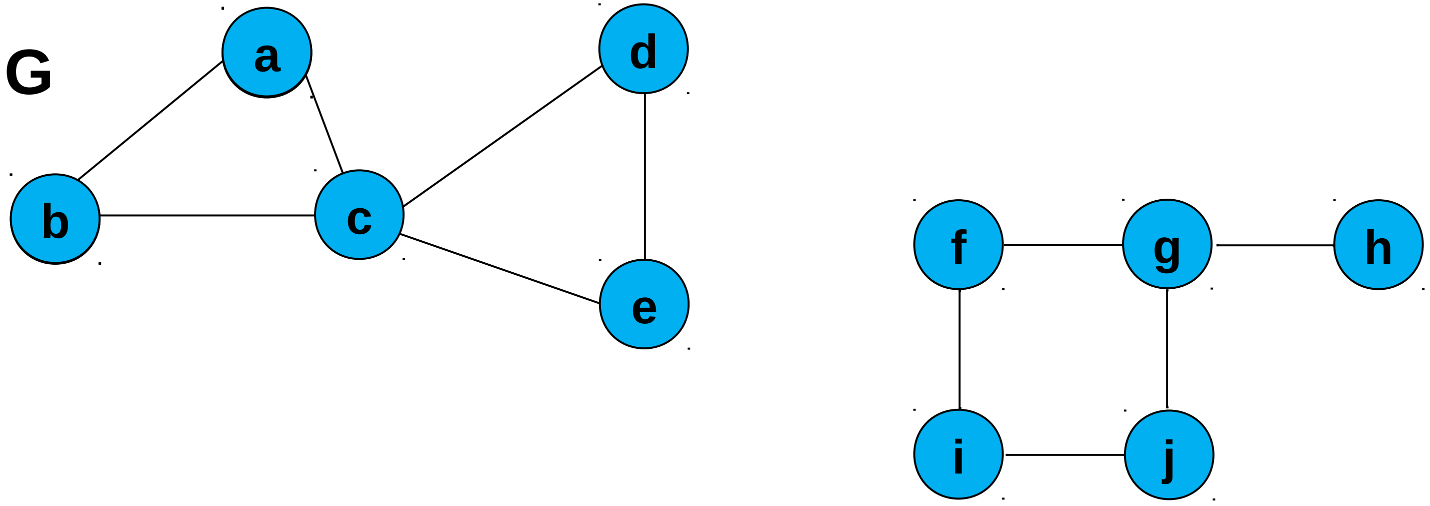


Decomposição por Conexidade

- Adaptação para grafos não orientados do Algoritmo de Malgrange
- Se baseia na determinação de vizinhanças dos vértices
- Complexidade: $O(n^2)$
- Outros algoritmos disponíveis (Trémaux, Tarjan, Gondran e Minoux, Szwarcfiter)

Exercício

- Aplique a adaptação do algoritmo de Malgrange no grafo G abaixo e indique o resultado.



Teorema

Um grafo G é desconexo

sss

V pode ser particionado em dois subconjuntos V1 e V2 de maneira que não existe aresta em G com um dos vértices extremos em V1 e o outro em V2

Teorema

Se um grafo (conexo ou desconexo) tem exatamente dois vértices de grau ímpar, então existe um caminho que liga esses dois vértices

Teorema

Seja G um grafo simples e conexo.

G é bipartido

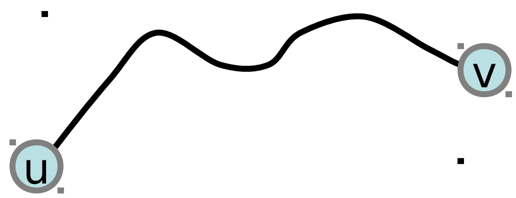
se e somente se

não contém ciclo ímpar

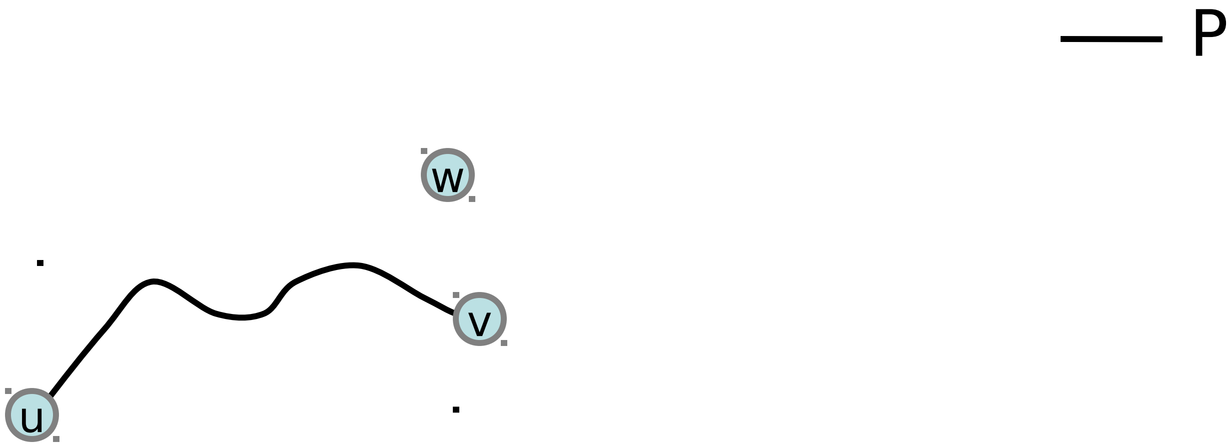
($\Leftarrow$)

(⇐)

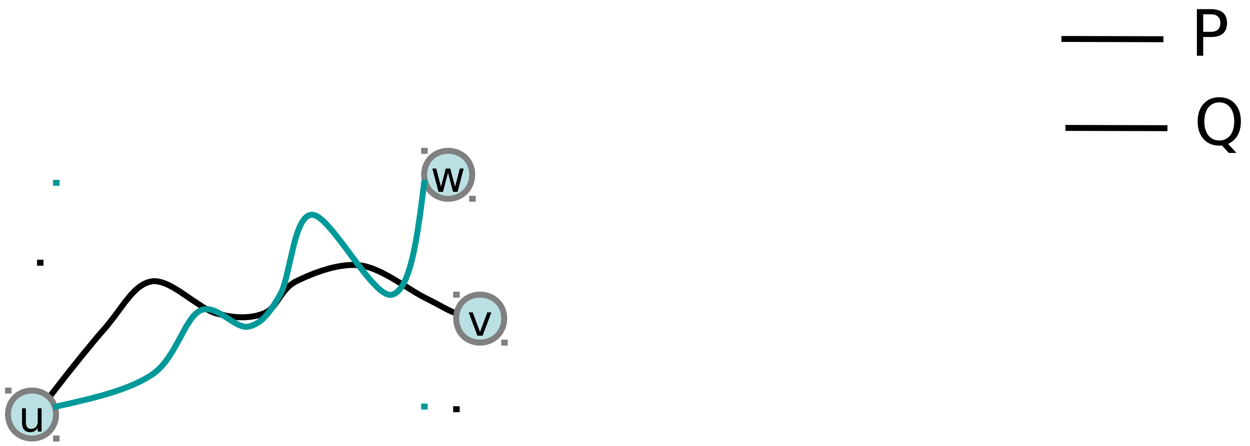
— P



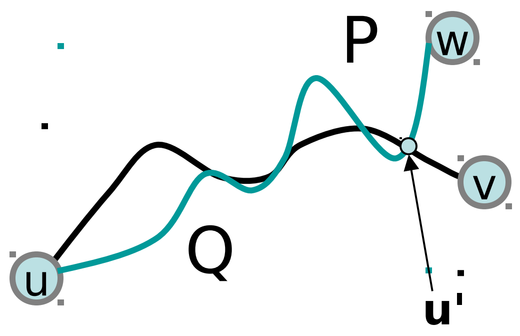
($\Leftarrow$)



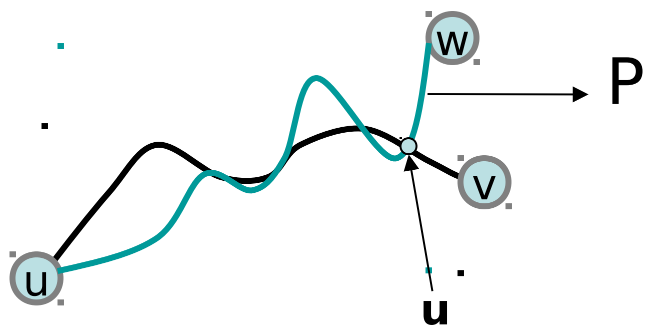
$(\Leftarrow)$



$(\Leftarrow)$



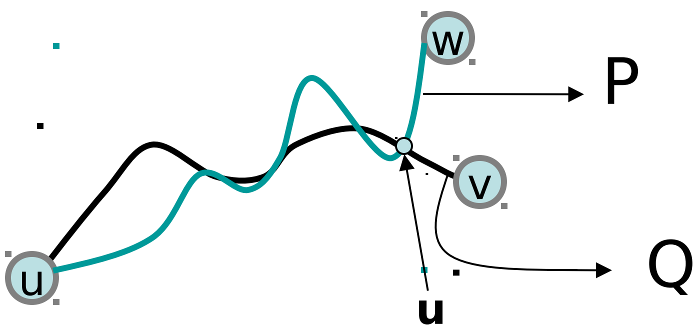
($\Leftarrow$)



— P

— Q

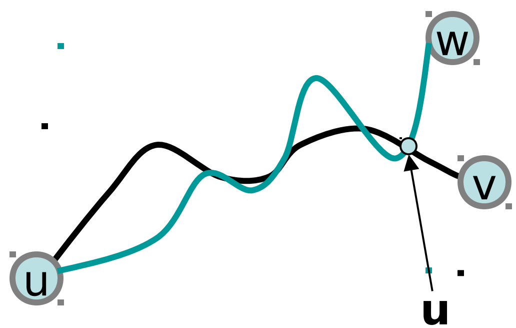
$(\Leftarrow)$



— P

— Q

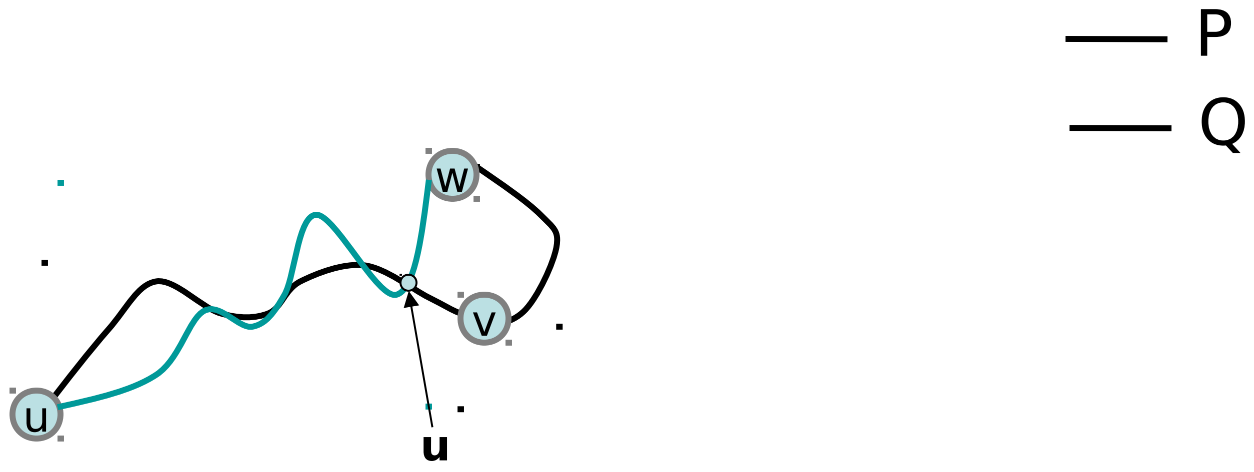
(⇐)



P

Q

($\Leftarrow$)



Teorema

Um grafo simples G com n vértices e k componentes conexas pode ter no máximo

$(n-k)(n-k+1)/2$ arestas

Prova

- Idéia:

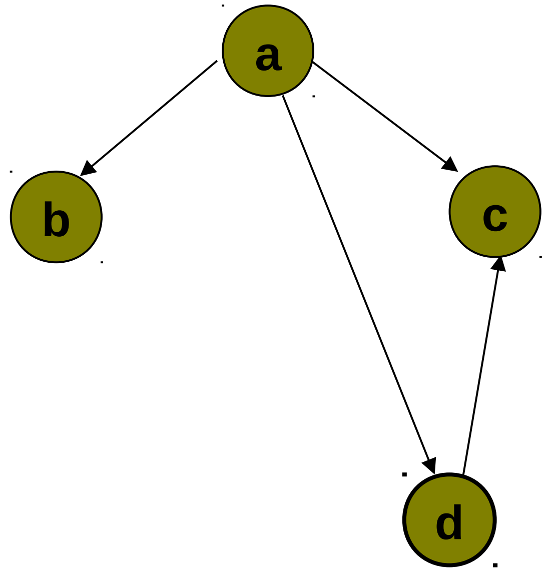
$n1 + n2 + ... + nk = n$ e $ni \geq 1$, $1 \leq i \leq k$

Desigualdade algébrica utilizada:

$$\sum_{i=1,k} ni^2 \leq n^2 - (k-1)(2n-k)$$

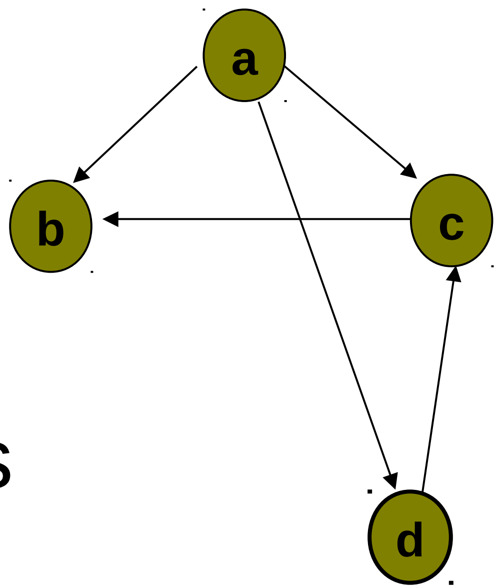
Conexidade em Digrafos

- Grafo simplesmente conexo ou s-conexo: todo par de vértices é unido por ao menos um caminho no grafo correspondente não direcionado



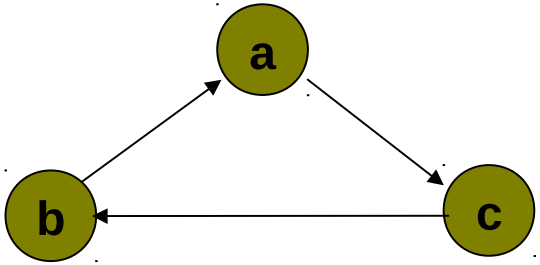
Conexidade em Digrafos

- Grafo semi-fortemente conexo ou sf-conexo: em todo par de vértices do grafo, um deles é atingível a partir do outro (ou seja, entre eles existe um caminho em ao menos um dos dois sentidos possíveis)



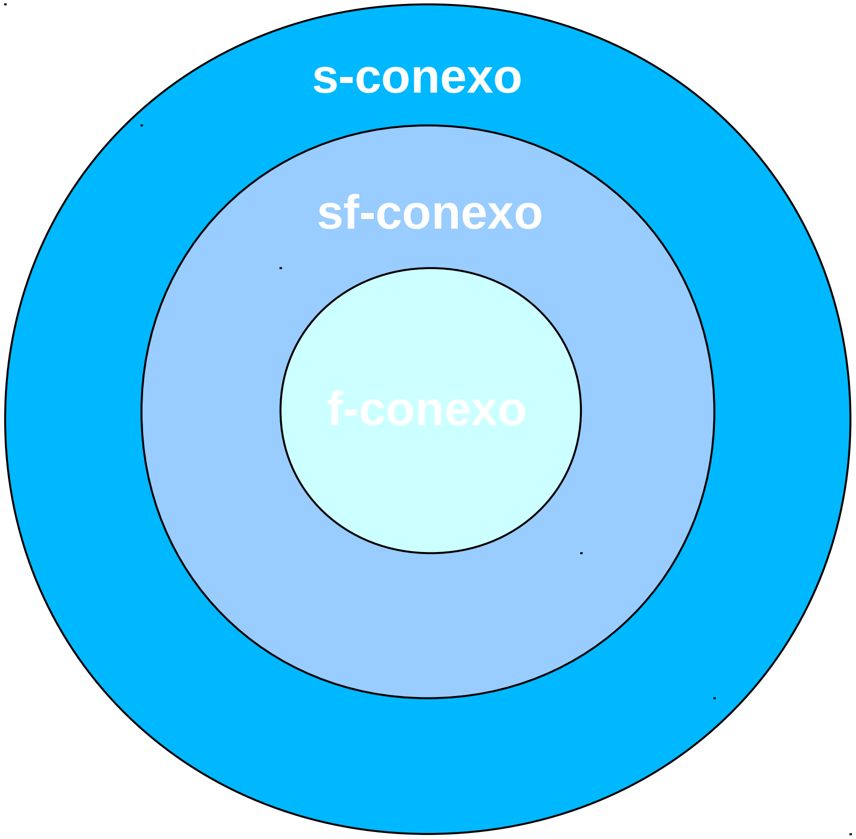
Conexidade em Digrafos

- Grafo fortemente conexo ou f-conexo: é um grafo no qual todo par de vértices é mutuamente atingível. Assim, a todo par de vértices está associado um par de caminhos de sentidos opostos



- Todo vértice é atingível a partir de um vértice dado e todo vértice atinge todo vértice dado

Níveis de Conexidade



Fechos Transitivos

- Conjuntos que representam ligações diretas ou indiretas entre vértices em grafos orientados.
- Diz-se que um vértice y é atingível a partir de x em um grafo G quando existe em G uma seqüência de sucessores que começa em x e termina em y.

Fecho Transitivo Direto

- $\hat{\Gamma}^{+}(x)$: conjunto de vértices de G atingíveis a partir de x

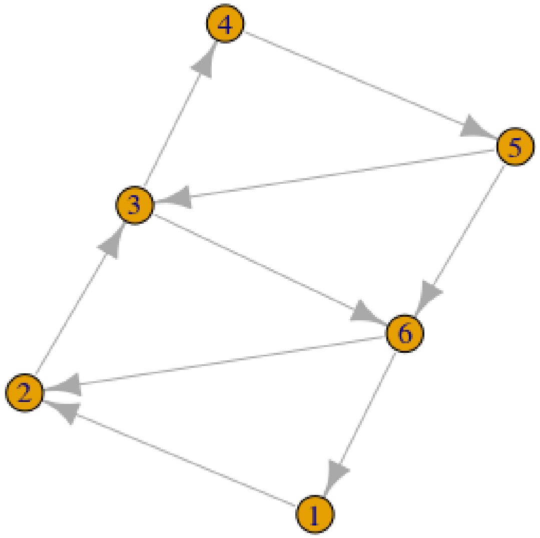
$\hat{\Gamma}^{+}(x) = \{x\} \cup [\cup_{k=1,\ldots,n} \Gamma^{+k}(x)]$

Fecho Transitivo inverso

- $\hat{\Gamma}^{-}(x)$: conjunto de vértices de G a partir dos quais x é atingível

Exercício

Determine $\hat{\Gamma}^{+}(1)$ e $\hat{\Gamma}^{-}(4)$ do grafo G:



Componentes f-conexas

- Atingibilidade recíproca: (simetria)
- Todo vértice é atingível a partir de si mesmo: (reflexividade)
- Se z é atingível a partir de y e y é atingível a partir de x então z é atingível a partir de x: (transitividade)

relação de equivalência sobre o conjunto de vértices de G

Componentes f-conexas

- Um grafo orientado qualquer pode ser particionado em componentes f-conexas maximais.
- Se um grafo orientado é f-conexo: a partição é o próprio conjunto de vértices do grafo.

Exercícios

a) Mostre que um grafo simples com n vértices e mais que [(n-1)(n-2)]/2 arestas é conexo.

b) Mostre que um grafo simples G permanece conexo mesmo depois da remoção de uma aresta a de G se e somente se a pertence a algum ciclo de G.

c) Dê um exemplo de um grafo simples e conexo que não possua ciclos de comprimento ímpar.

d) adaptar o algoritmo que determina componentes conexas para determinar componentes f-conexas