Fluxo em grafos: uma introdução

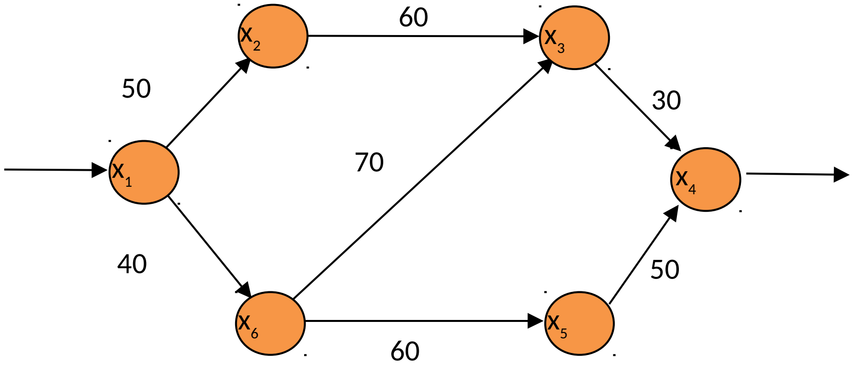
- Grafos valorados: representam situações de natureza estática
  - Comprimento de estradas em um mapa rodoviário
- Fluxo: representam situações de natureza dinâmica
  - Número de carros que passam em uma estrada em um determinado intervalo de tempo
- Grafo de fluxo: estrutura de organização de vias pelas quais algum recurso se move

O que queremos resolver?

- Qual é a maior quantidade de fluxo que uma rede ou grafo suporta?
- Qual é o menor curso associado a uma dada quantidade de fluxo?
- Onde e por que teríamos que intervir no problema de fluxo para correção de alguma falha?

Um modelo de fluxo

- Valores inteiros
- As arestas são orientadas (arcos) indicando o sentido do fluxo
- Para cada arco é definida a capacidade máxima



Tipos de fluxo

- Lineares e não lineares
- Fluxos não lineares: modelos matemáticos muito complexos
- Trabalharemos com fluxos lineares!

Um grafo de fluxo

- Definição: Um grafo de fluxo é representado por $G = (V,E,f)$, onde f é um vetor de dimensão $m+1$, onde m é o número de arcos de G. Assim, $f = (f_0,f_1,...,f_m)$, onde f_i, $i=1,...,m$ corresponde ao valor de fluxo que passa pelo arco i.

Observações

- O fluxo em G é representado pela orientação dos arcos
- G deve possuir um único vértice fonte s e um único destino t. De s deve ser possível atingir todo vértice de G e de qualquer vértice de G deve ser possível atingir t.
- Um grafo de fluxo corresponde a uma fotografia do trânsito do fluxo que nos interessa

Observações

- Lei da conservação: todo fluxo que chega em um vértice, sai dele.
- O grafo de fluxo G obedece a lei da conservação se for adicionado um arco (t,s) a G.
- O arco (t,s) deverá ter valor de fluxo igual ao fluxo total que passa por G.

Restrições de canalização

- São limites (inferior e superior) para a quantidade de fluxo que passa em um arco do grafo (capacidade).
- $b_{ij} \leq f_{ij} \leq u_{ij}$, para todo arco (i,j) de G.
- Fluxo viável: atende às restrições de canalização para cada arco de G.
- Em geral b_{ij} é nulo.

Fluxo máximo

- O problema de fluxo máximo consiste em maximizar o valor total de fluxo (ou seja, f0), considerando-se as restrições de canalização e a lei de conservação de fluxo.
- É útil, por exemplo, em situações que se deseja avaliar a capacidade de uma rede de transportes absorver uma certa quantidade de fluxo
- Fonte e destino artificiais: útil para problemas que possuem várias fontes e destinos.

Formulação matemática

Maximizar f_0

sujeito a:

$$\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} f_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} f_{ij} = \begin{cases} f_0, \text{ se } i=s \\ 0, \ \forall i \in V-\{s,t\} \\ -f_0, \text{ se } i=t \end{cases}$$

$0 \leq f_{ij} \leq u_{ij}$, para todo arco (i,j) de G

Questão típica

Dados dois pontos s e t, qual é o fluxo máximo possível na rede definida entre esses pontos?

- Teorema de Ford-Fulkerson: o valor do fluxo máximo em um grafo com um vértice fonte e um vértice destino é igual à capacidade do corte de arcos de capacidade mínima.

Definição

- Um corte de arestas [S,S'], onde S' = V-S, com respeito a um par de vértices s e t em um grafo conexo G coloca s e t em dois componentes conexos distintos S e S'.
- Se G for orientado, um corte s-t é tal que G é separado em S e S' de forma que $s \in S$ e $t \in S'$.
- O arco (i,j) de G, com $i \in S$ e $j \in S'$, é dito um arco de ida e (j,i), um arco de volta.
- (S,S'): conjunto de arcos de ida em [S,S']

  (S',S): conjunto de arcos de volta em [S,S']
- Capacidade de um corte: soma das capacidades dos arcos de ida (S,S')

Teorema

O fluxo máximo possível entre dois vértices x e y em um grafo de fluxo é igual ao mínimo das capacidades de todos os cortes de arestas com respeito a x e y.

Prova

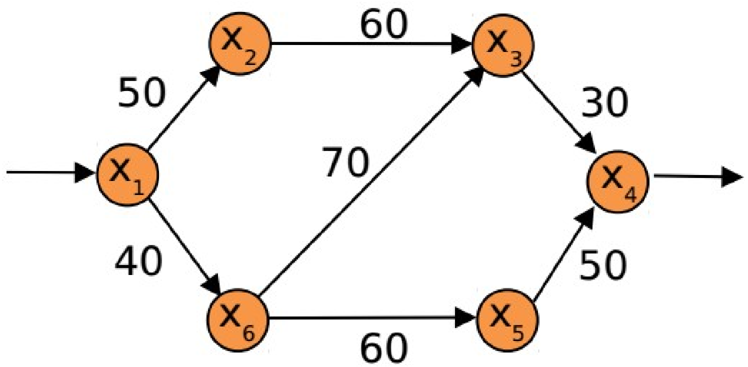
- Considere qualquer corte de arestas [S,S'] com respeito aos vértices x e y.
- No subgrafo G-[S,S'], desconexo, não existe caminho que liga x a y.
- Todos os caminhos em G que ligam x a y devem conter pelo menos uma aresta de [S,S'].
- Todo fluxo de x para y ou de y para x deve passar por uma ou mais arestas de [S,S'].
- O fluxo total entre x e y não deve exceder a capacidade de [S,S'].
- Como isso deve valer para todo corte de arestas [S,S'] entre x e y, o fluxo total não pode exceder o mínimo das capacidades dos cortes

Algoritmo de Ford-Fulkerson

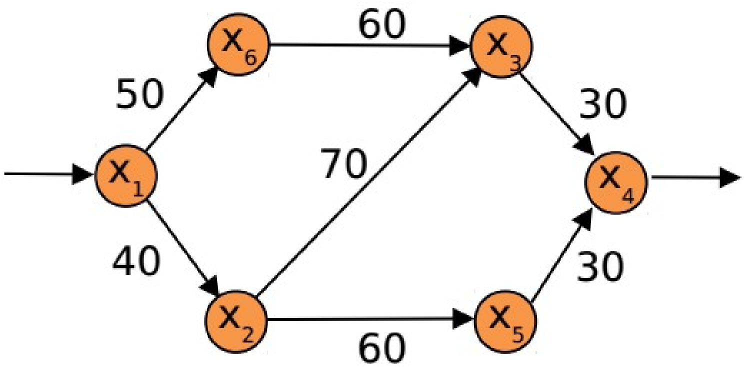
- Seja G = (V,A,f) um grafo de fluxos e Gf = (V,Ef) um grafo associado a G, chamado grafo de aumento de fluxo ou grafo de folgas.
- Esse grafo é usado no algoritmo de Ford-Fulkerson para achar o fluxo máximo e sua definição depende do fluxo determinado até o momento da sua construção. Consideramos custo igual a capacidade.
- Cada arco de Gf é definido da seguinte forma:
  - (a) o arco (v,w) ∈ Ef se fvw < custovw e
  - (b) o arco (w,v) ∈ Ef se fvw > 0.
- Os arcos (v,w) e (w,v) são valorados respectivamente por
  - εvw = custovw – fvw e
  - εwv = fvw.
- Gf poderá ter dois arcos associados a um arco de G, desde que o fluxo esteja estritamente entre os limites.
- Um corte de arcos K = [X,V-X] em um grafo G é o conjunto de arcos em G com uma das extremidades em X e a outra em V-X. Se G é valorado então a capacidade do corte K é dada pela soma dos custos de seus arcos de ida (extremidade de partida em X e de chegada em V-X).

1. **entrada**: G = (V,A,f),
   custo(a), para todo arco a de G,
   fluxo inicial dado ou nulo
2. Capacidade_Corte ← ∞
3. $f_0 \leftarrow 0$; // quando se consideram inicialmente todos os fluxos como nulos
4. Construir G_f associado a G;
5. Enquanto existir caminho μ_{st} de s a t em G_f faça
6. determinar folga γ_{st} de μ_{st} em G_f
   //γ_{st} = mínimo das folgas dos arcos de μ_{st};
7. introduzir fluxo em μ_{st} em G igual a γ_{st};
8. $f_0 \leftarrow f_0 + \gamma_{st}$;
9. construir G_f;
10. X ← s ∪ {vértices atingíveis a partir de s em Gf};
11. Calcular Capacidade_Corte(X,V-X) em G; // f_0 é o valor do fluxo máximo que passa por G e equivale ao valor de Capacidade_Corte(X,V-X) em G
12. **saída**: f_0

Exemplos



X1
X2
X3
X4
X5
X6
50
60
30
70
40
50
60



X1
X6
X3
X4
X5
X2
50
60
30
70
40
30
60

(a)

(b)