Coloração

O problema de Coloração de Grafos

- Pode ser definido sobre o conjunto dos vértices ou o conjunto das arestas de um grafo;
- Coloração própria: uma coloração própria para um grafo não direcionado G=(V,E) é um mapeamento $c:V \rightarrow \{1, \ldots, k\}$ tal que se $\{u, v\} \in E$ então $c(u) \neq c(v)$.
- Os elementos do conjunto $\{1, \ldots, k\}$ são chamados cores

Coloração de Grafos

- Duas versões usuais para o problema são:
  - Determinar se é possível colorir um grafo com um número pré-determinado de cores ou
  - Determinar o número cromático (ou o índice cromático) de um grafo G: o menor número de cores de $\{1, . . ., k\}$ para colorir propriamente o conjunto de vértices (ou de arestas) de um dado grafo G

Exemplos de aplicação

- primeira versão ⇨ programação de horários de grades escolares: alocação de n professores a m turmas nos h horários disponíveis na escola.

vértice	⟷	aula de um professor
aresta	⟷	as aulas ligadas pela aresta não podem ser realizadas no mesmo horário
cor	⟷	horário

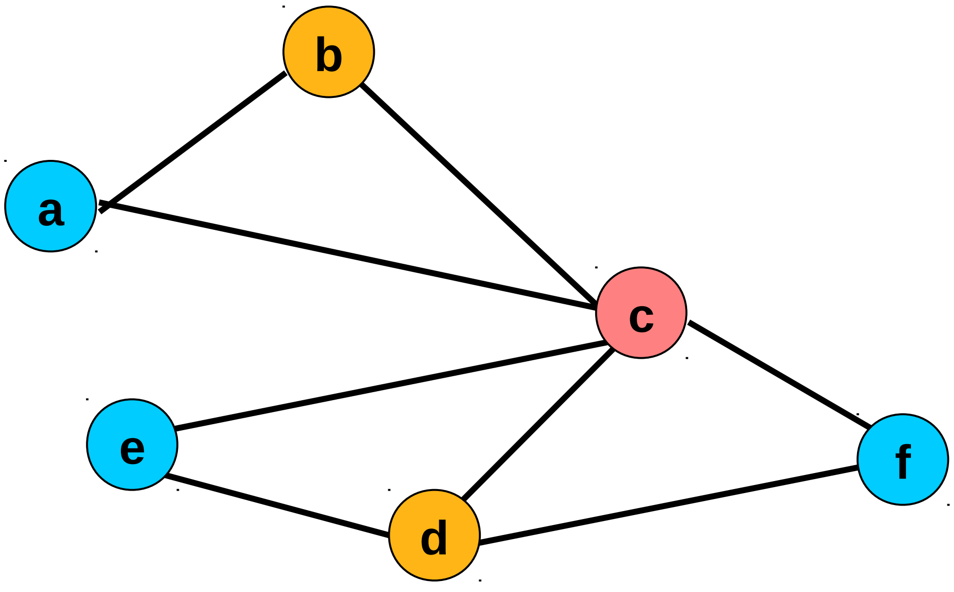
- segunda versão ⇨ computação paralela: vértices de uma mesma cor representam processos que podem ser executados em paralelo, pois não possuem dependências.

poucas cores ⟷ processamento rápido

Número cromático (χ(G))

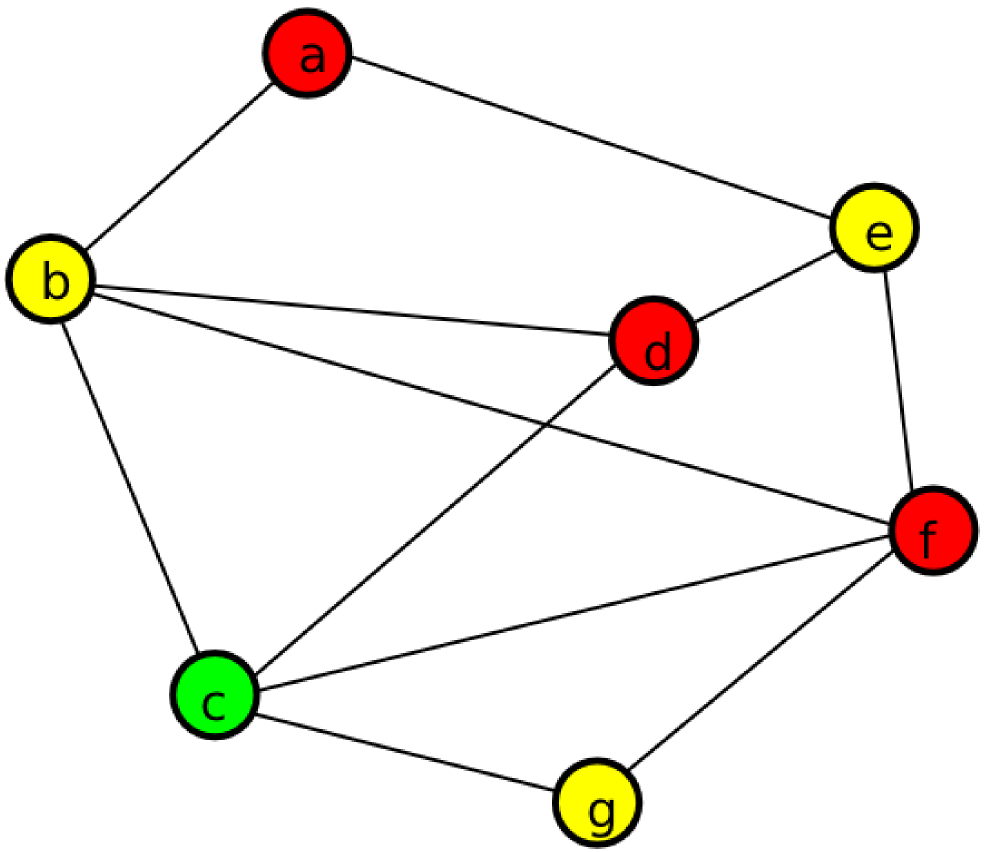
- Um grafo que requere *k* cores diferentes para a sua coloração própria e nenhuma a menos possui número cromático χ(G) = *k*

3-cromático

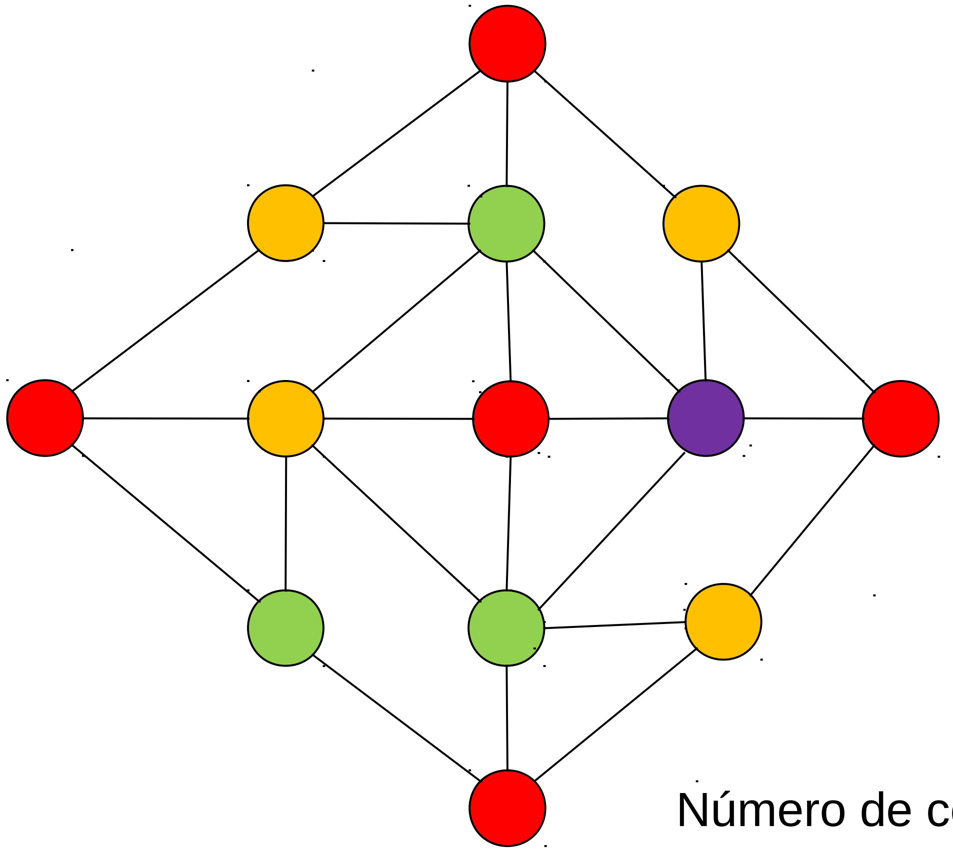


Obter o número cromático

- Particionar o conjunto de vértices em k subconjuntos (mínimo possível) de vértices não adjacentes.

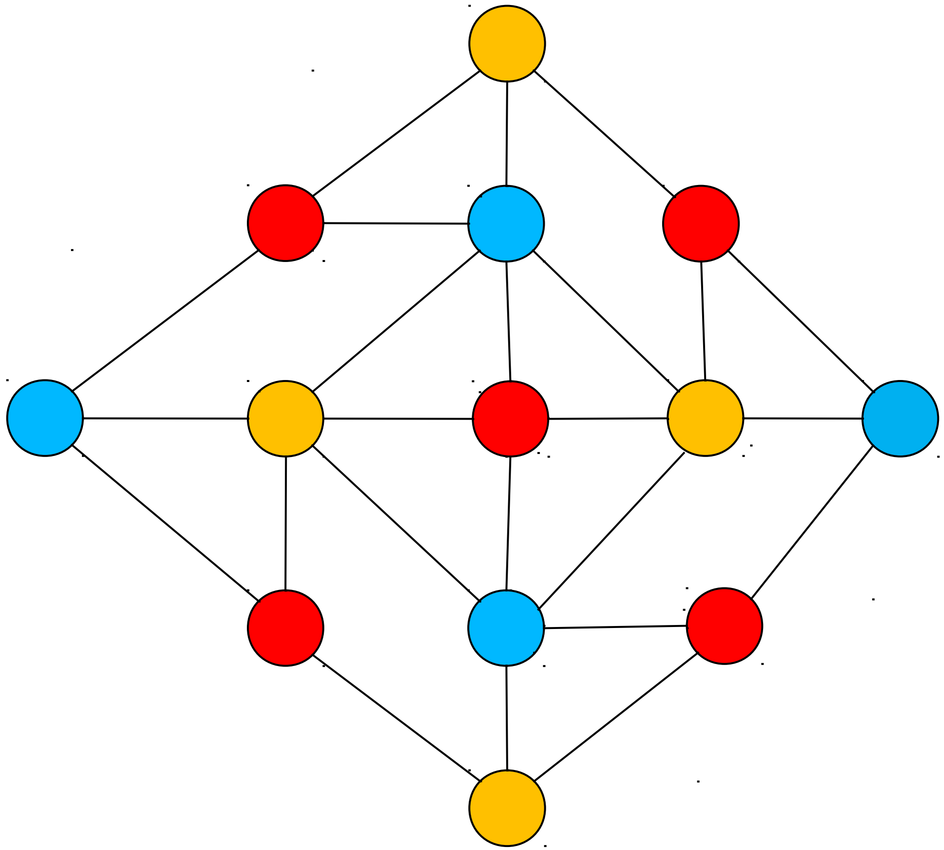


Qual $\chi(G)$?



Número de cores utilizadas: 4

Número cromático = 3



Algumas considerações...

- Coloração de vértices: considerado em grafos simples e conexos
- Grafo nulo: 1-cromático
- Grafo com uma ou mais arestas: pelo menos 2-cromático
- Grafo com clique de tamanho k: pelo menos k-cromático
- Grafo cíclico: 2-cromático ou 3-cromático

Teorema

Toda árvore com dois ou mais vértices

é 2-cromática

Obs: toda árvore é 2-cromática mas nem todo grafo 2-cromático é uma árvore

Teorema

Um grafo com pelo menos uma aresta é
2-cromático

sss

não possui ciclos com comprimento
ímpar

Corolário

Um grafo G é bipartido

sss

G é 2-cromático

Teorema

Seja Δ o grau máximo dos vértices de G. Então

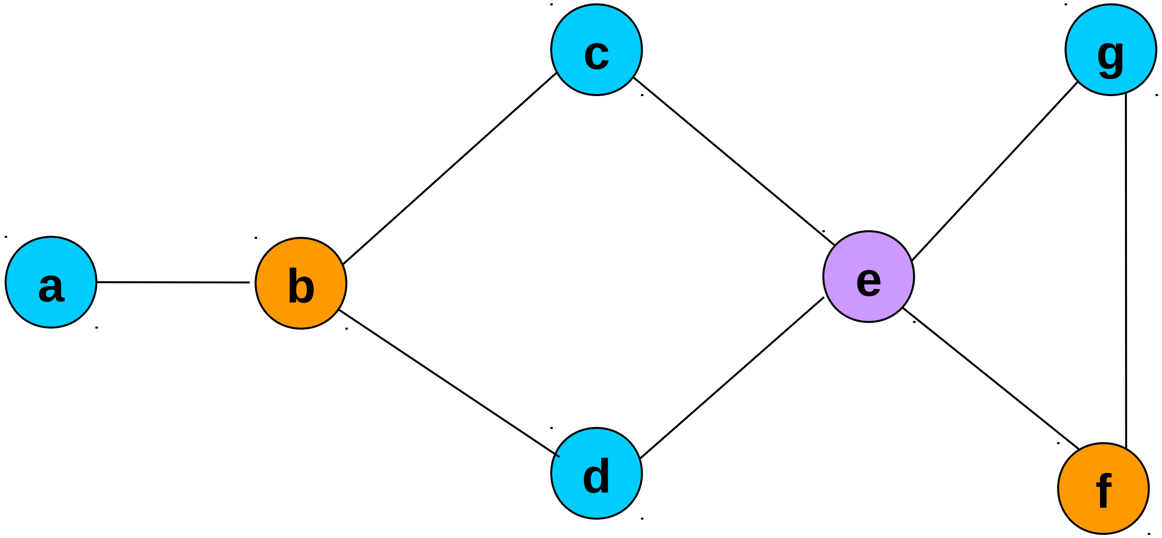
$$\chi(G) \leq 1 + \Delta$$

Exercício!

Partição Cromática

- Um grafo G k-cromático é p-partido sss $k \leq p$.
- Em um grafo p-partido, vértices de uma mesma partição não são adjacentes.
- Um conjunto de vértices de um grafo é dito independente se não possui vértices adjacentes.

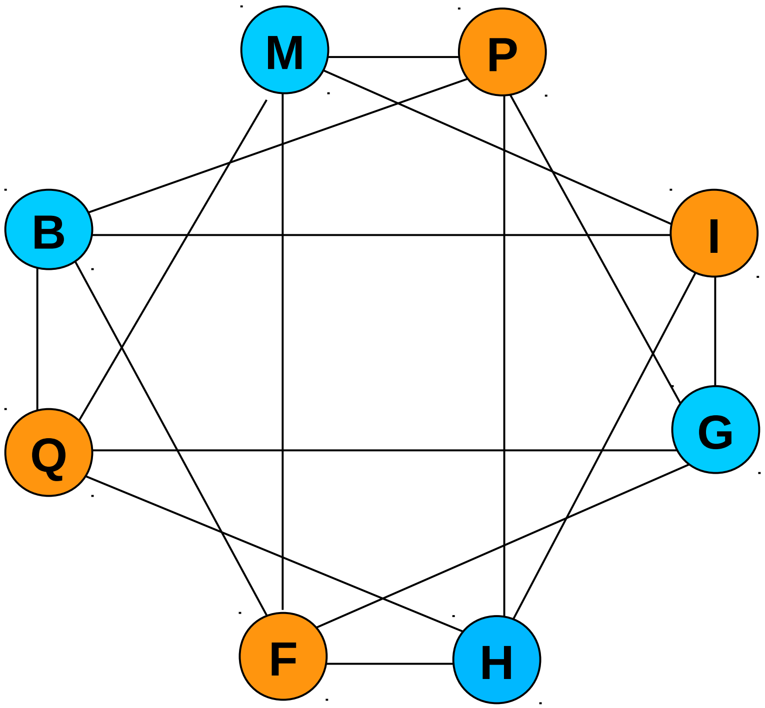
Conjunto Independente de vértices



Exemplos:
{a, c, d, g},
{e}, {a,d}

Conjunto Independente de vértices

- Incompatibilidade de horários entre professores que devem aplicar prova final: deseja-se obter o maior número possível de turmas que realizarão prova final de várias disciplinas em um mesmo horário. Turmas com alunos em comum que farão prova final de disciplinas diferentes não podem ser alocadas no mesmo horário.

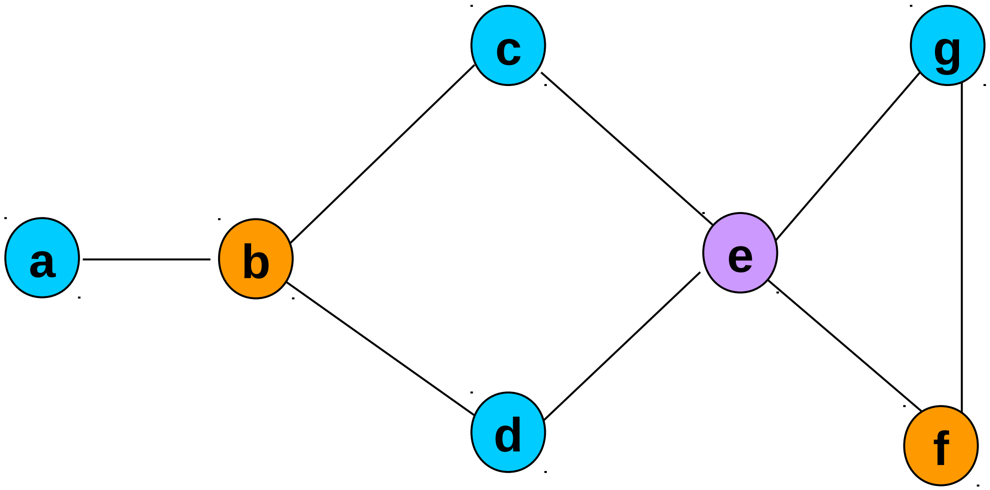


Neste exemplo, dois conjuntos independentes de mesmo tamanho!

Conjunto independente maximal de vértices

Um conjunto independente maximal é um conjunto independente no qual não se pode adicionar mais nenhum vértice sem destruir a propriedade de independência

Exemplos:
{a,c,d,g},
{b,f}



Conjunto Independente de vértices maximal

- Existem vários conjuntos independentes maximais em um grafo que podem ter diferentes tamanhos.
- Qual é o de maior tamanho?
- $\alpha(G)$ = número de independência de G (cardinalidade do conjunto independente de vértices de maior tamanho de G)

Como achar um conjunto independente maximal?

- Comece com um vértice qualquer.
- Selecione os próximos vértices sempre testando se o conjunto ao qual eles estão sendo inseridos continua independente
- Atenção: encontra-se um conjunto maximal e não o maior de todos!

$\chi(G)$ X $\alpha(G)$

- Encontrar $\alpha(G)$: consiste em encontrar todos os conjuntos independentes maximais e obter o maior;
- Encontrar $\chi(G)$: número mínimo de conjuntos independentes maximais cuja união resulta em V

Coloração de arestas

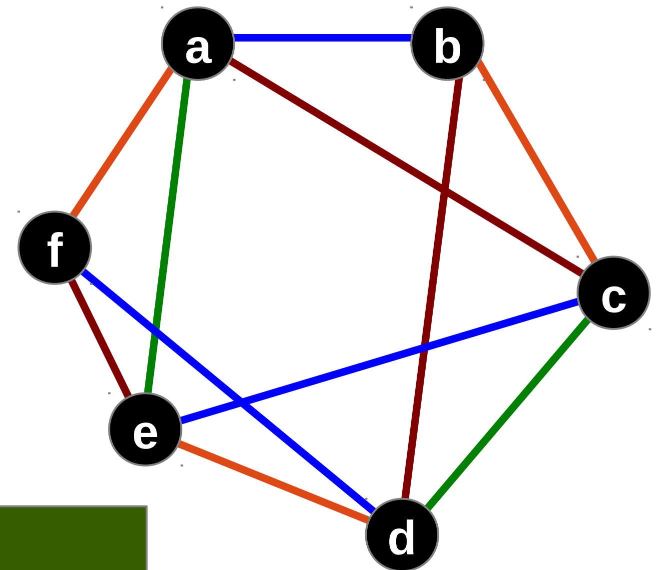
Exemplo de aplicação:

Em um laboratório, uma lista de tarefas deve ser cumprida o mais rápido possível. Cada tarefa deve ser realizada por uma dupla de integrantes do laboratório e necessita de 1 hora para ser executada. Qual

é o

nec

tare



Índice cromático:
Menor número de cores para colorir propriamente as arestas de um grafo