Planaridade

Planaridade

- Ideia intimamente ligada à noção de mapa, ou seja, uma representação de um conjunto de elementos (usualmente geográficos) dispostos sobre o plano
- A planaridade é um conceito associado a grafos conexos. Se o grafo não for conexo, os conceitos podem ser aplicados a cada componente conexo.

Planaridade

- Aplicações:
  - Cartografia
  - Circuitos impressos
  - Malhas de transporte terrestre

Grafo planar

- Um grafo planar pode ser representado no plano sem que duas arestas quaisquer se cruzem.

- Os poliedros podem ser representados por grafos planares.

Imersão em uma superfície S

- O desenho de uma representação geométrica de um grafo G em qualquer superfície S tal que nenhuma aresta se cruza é dita imersão de G na superfície S.
- Um grafo G é planar se existe uma imersão de G no plano.

Faces de um grafo planar

- Seja R uma representação plana de G em um plano P
- As linhas de R dividem P em regiões denominadas faces de R.
- Existe exatamente uma face não limitada, denominada face externa.
- Uma face de um grafo planar é uma porção do plano limitado por um ciclo do grafo que não contenha cordas.

Faces de um grafo planar

- Duas representações planas de um grafo planar possuem sempre o mesmo número de faces.
- Se G é planar, todo subgrafo de G também é planar.

Fronteira de uma face

- A fronteira de uma face é o percurso fechado que limita e determina a face. Neste percurso, cada ponte é atravessada duas vezes.

- Duas faces são adjacentes se possuírem uma aresta em comum em suas fronteiras.

Grau de uma face

- O grau de uma face f é o comprimento do percurso fechado que determina sua fronteira.

$$\sum d(f_i) = 2m,\ i = 1,\dots,nf$$

nf = número de faces

Fórmula de Euler

- Para grafos planares, vale a relação de Euler, já conhecida para poliedros convexos
- Essa fórmula relaciona faces, vértices e arestas de um grafo planar convexo.

$$\boxed{f = m - n + 2}$$

Teorema

Se G é um grafo planar então

$$f = m - n + 2$$

Prova:

Por indução sobre f

- Quanto maior é o número de arestas de um grafo G em relação a seu número de vértices, mais difícil intuitivamente se torna a obtenção de uma representação planar para G.
- Qual seria um limite superior para o número de arestas de um grafo planar?

Corolários do teorema da fórmula de Euler

- Corolários:
- Seja G um grafo planar, com

$|E| > 2$. Então $m \leq 3n - 6$.

- Seja G um grafo planar e bipartido, com $|E| > 2$. Então $m \leq 2n - 4$.

Os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

Subdivisão de uma aresta

- A subdivisão de uma aresta {v,w} de um grafo G é uma operação que transforma a aresta {v,w} no caminho $vz_1z_2...z_kw$, $k \geq 0$ e z_i são vértices de grau 2 adicionados a G.

G2 é subdivisão de G1

Diz-se que um grafo G2 é uma subdivisão de um grafo G1 quando G2 puder ser obtido de G1 através de uma sequência de subdivisões de arestas de G1.

Teorema de Kuratowski

Um grafo é planar

sss

não contém como subgrafo uma subdivisão de K_5 e $K_{3,3}$

Grafo Dual Planar

- Forma alternativa de representação de um grafo planar
- Os vértices do grafo dual representam as faces do grafo original e as arestas do grafo dual indicam adjacências entre as faces no grafo original.
- Um grafo pode ter várias representações planas. Os grafos duais de cada uma delas podem não ser isomorfos entre si.

G^D é o dual de G', planar, se:

- Um vértice de G^D está associado com cada face de G';
- Para cada aresta ***a*** de G', existe uma aresta $\boldsymbol{a^D}$ de G^D, associada com ***a***, ligando os vértices correspondentes às faces;
- Se ***a*** separa as faces $\boldsymbol{f_i}$ e $\boldsymbol{f_j}$ em G' então $\boldsymbol{a^D}$ conecta os dois vértices de G^D associados com $\boldsymbol{f_i}$ e $\boldsymbol{f_j}$;
- Uma aresta ***a*** pode não separar duas faces de G' quando ***a*** é incidente a um vértice de grau 1. Neste caso, $\boldsymbol{a^D}$ forma um laço no vértice de G^D, associado com a face em G', limitada por ***a***.

Podemos inferir que...

- Considerando G^D o dual de uma representação planar G' de um grafo G:
  - $V(G^D) = f(G')$
  - $E(G^D) = E(G')$
  - $d(v^D_i) = d(f_i)$, para toda face f_i de G'

Teorema

Um grafo planar G é bipartido se e somente se o seu dual G^D é euleriano

O problema das 4 cores

- Em 1852 Guthrie publicou em uma revista científica a conjectura proposta por seu irmão e apenas em 1976, Appel, Hasken e Koch provaram matematicamente o resultado, após um processamento de mais de 1200 horas de CPU de várias instâncias do problema.